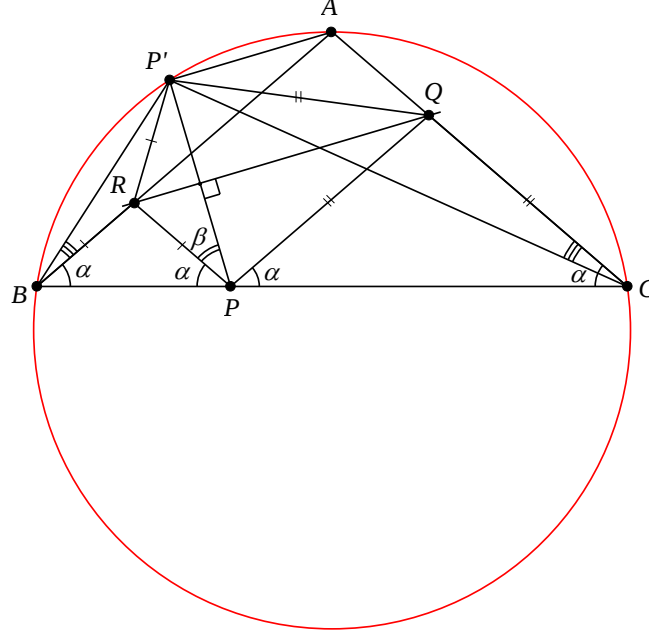


Problema 872. Sea P cualquier punto de la base de un triángulo isósceles. Sean Q y R las intersecciones de los lados iguales con las rectas que contienen a P paralelas a los mismos. Probar que la reflexión de P según la recta QR pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Leigh, R.B., Liu, A. (2011): Hungarian Problem Book IV. MAA.

Soluzione di Rosanna Tupitti. Sia P' il simmetrico di P rispetto alla retta QR e siano $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, $\angle RPP' = \beta$ come indicato in figura.



Essendo $\angle RBP = \angle RPB = \alpha$ abbiamo che $RB = RP$ e dato che $P'R = RP$ dalla proprietà transitiva abbiamo che $P'R = RB$, per cui

$$\begin{aligned}\angle P'BA = \angle P'BR &= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BRP') = \frac{1}{2} [180^\circ - (360^\circ - \angle BRP - \angle P'RP)] = \\ &= \frac{1}{2} (\angle BRP + \angle P'RP - 180^\circ) = \frac{1}{2} [180^\circ - (360^\circ - 180^\circ + 2\alpha - 180^\circ + 2\beta)] = 90^\circ - (\alpha + \beta)\end{aligned}\quad (1)$$

Essendo

$$\angle P'PQ = 180^\circ - \angle BPP' - \angle QPC = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \alpha = 180^\circ - (2\alpha + \beta)$$

abbiamo:

$$\angle P'QP = 2\angle PQR = 2(90^\circ - \angle P'PQ) = 2[90^\circ - (180^\circ - 2\alpha - \beta)] = 4\alpha + 2\beta - 180^\circ\quad (2)$$

Essendo $\angle QPC = \angle QCP = \alpha$ abbiamo che $QP = QC$ e dato che $QP' = QP$ dalla proprietà transitiva abbiamo che $QP' = QC$ per cui, tenuto conto di (2), abbiamo:

$$\begin{aligned}\angle ACP' = \angle QCP' &= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle P'QC) = \frac{1}{2} [180^\circ - (\angle P'QP + \angle PQC)] = \\ &= \frac{1}{2} [180^\circ - (4\alpha + 2\beta - 180^\circ) - (180^\circ - 2\alpha)] = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\alpha - 2\beta) = 90^\circ - (\alpha + \beta)\end{aligned}\quad (3)$$

Da (1) e (3) segue che $\angle P'BA = \angle P'CA$, quindi P' appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC . $\square$