

Quincena del 16 al 31 de Marzo de 2018.

Problema 872.-

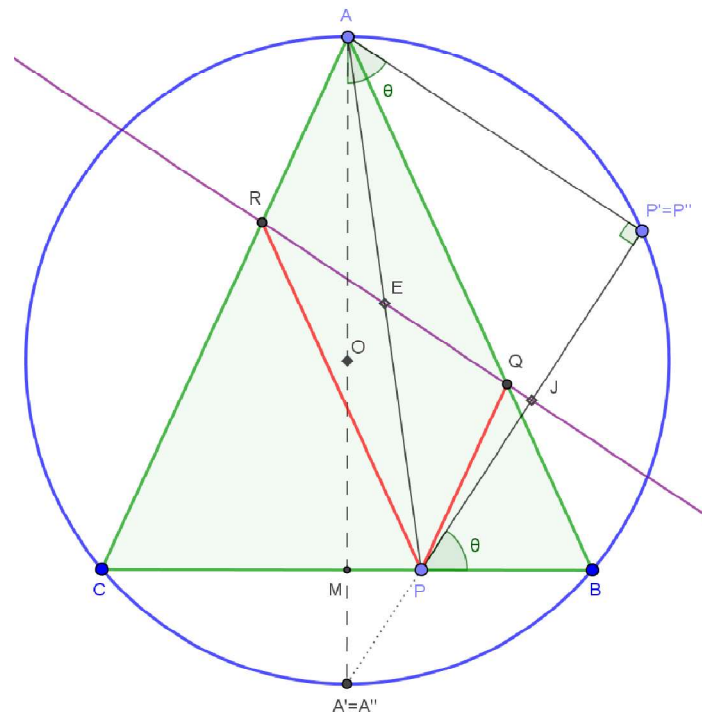
Problema 2. Sea P cualquier punto de la base de un triángulo isósceles. Sean Q y R las intersecciones de los lados iguales con las rectas que contienen a P paralelas a los mismos. Probar que la reflexión de P según la recta QR pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

Leigh, R.B., Liu, A. (2011): Hungarian Problem Book IV. MAA.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sea A' el punto diametralmente opuesto al vértice A .

Si se toma $P = M$, punto medio de BC , QR es la paralela media y el simétrico P' de P es A .



La perpendicular a QR por P define el punto J en este segmento. Sea E el **punto medio** de AP (intersección de las diagonales del paralelogramo $ARPQ$).

La paralela a QR por A corta a la recta PJ en el simétrico P' de P (y a la circunscrita en P'').

Supongamos que la semirrecta JP corta a la circunscrita en A'' . La recta JP intercepta en la circunferencia circunscrita el segmento $A''P''$.

Demostración de que todas la rectas JP se cortan en A'

Los ángulos $\angle P''PB$ y $\angle P''AA'$ son iguales por tener sus lados perpendiculares entre sí.

El primero, por ser interior a la circunferencia, es igual a la semisuma de los arcos que abarca

$$\angle P''PB = \frac{1}{2}(P''B + A''C)$$

el segundo, como ángulo inscrito, abarca el arco $P''BA'$, por tanto

$$\angle P''AA' = \frac{1}{2}(P''B + BA').$$

De la igualdad entre estos se sigue necesariamente (por ser isósceles el triángulo) $A'' = A'$. Es decir que la recta JP pasa por el extremo A' del diámetro AA' , cualquiera que sea P .

Demostración de que $P' = P''$

Tenemos que la recta JP , o bien la JA' , es perpendicular a AP' . Como AA' es un diámetro necesariamente P' está en la circunscrita.

