Problema 873.-

1. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC.
   Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V.
   Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.

2. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AB.
   Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V.
   Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB.

3. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AC.
   Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V.
   Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC.

4. Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR.

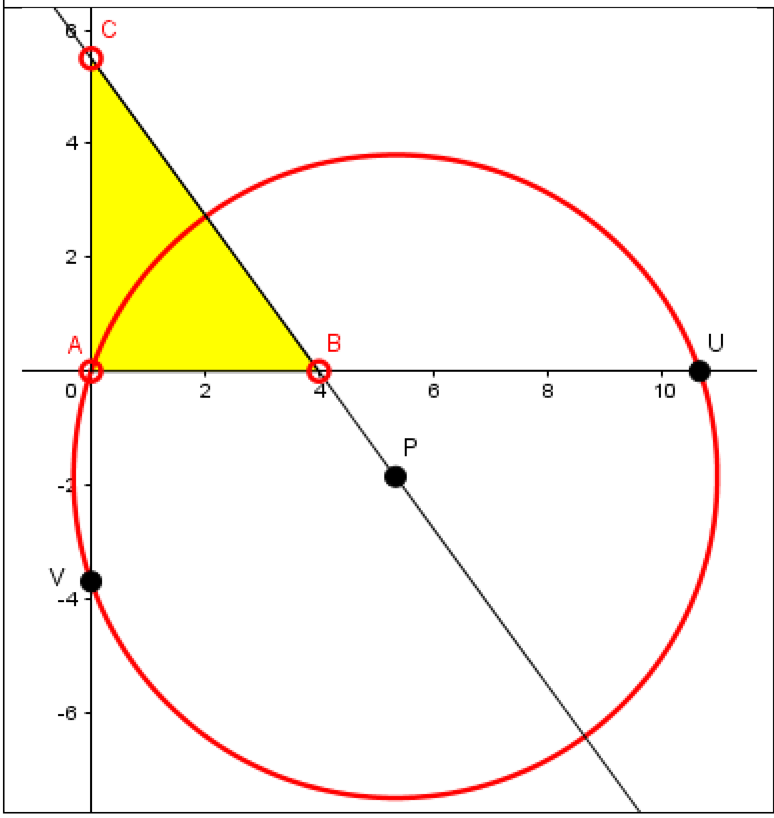
   Altshiller-Court, N. (1952) College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (p. 149)

5. Dado el triángulo $A(0,0), B(1,0), C(2,4)$, hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1, 2 y 3.

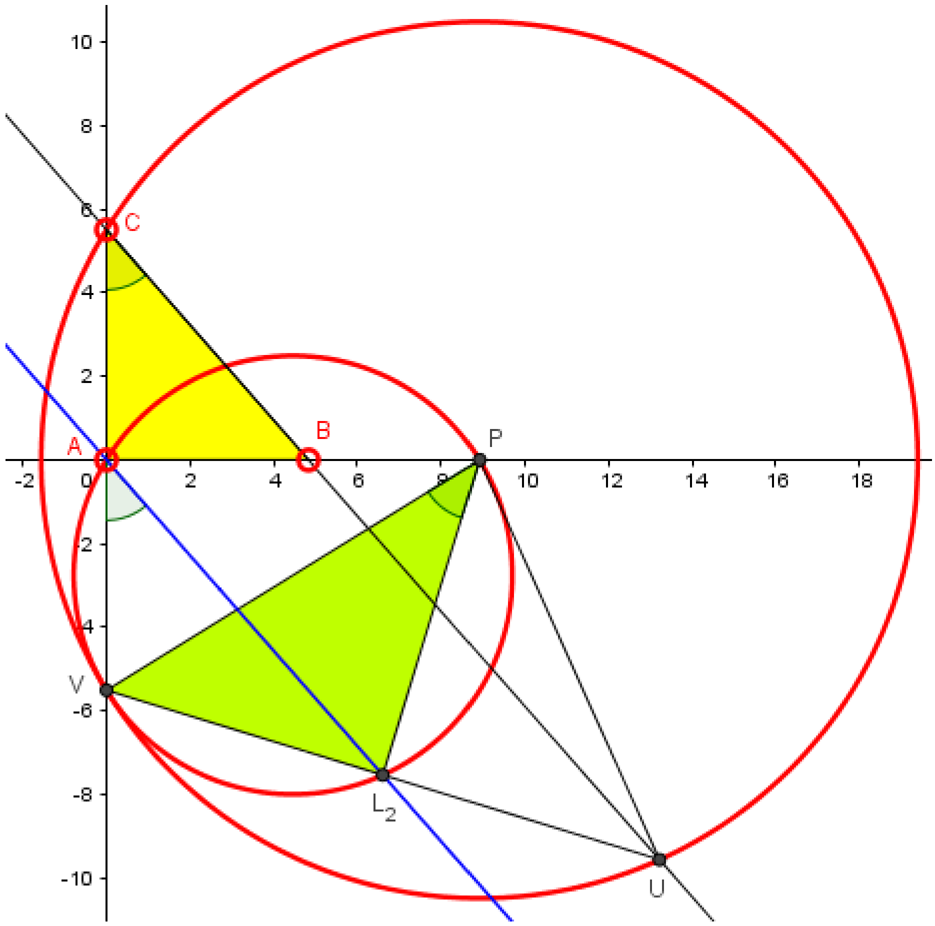
Barroso, R. (2018): Comunicación personal de los casos 1, 2, 3 y 5, generalizando el caso d) de Altshiller- Court, N.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

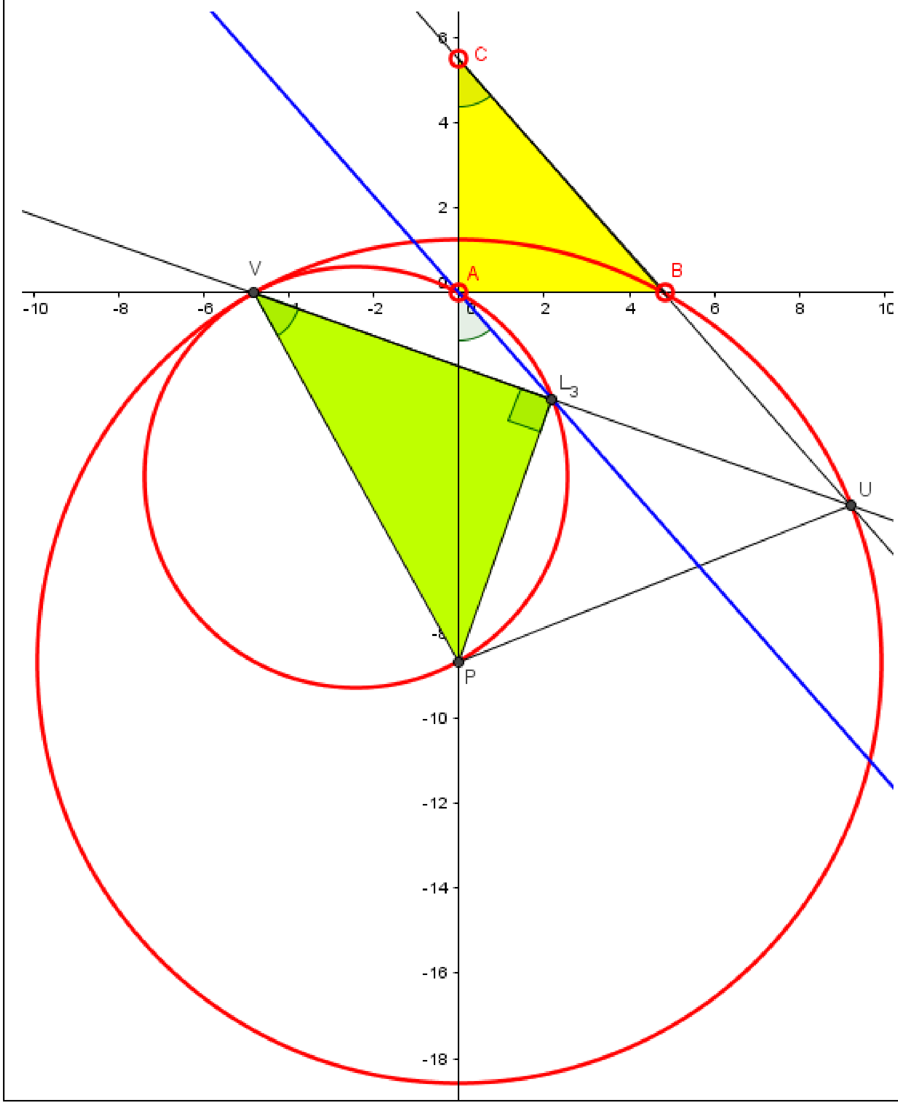
1. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC.
Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V.
Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.



El Lugar Geométrico coincide con el propio punto P.
El segmento UV es un diámetro de la circunferencia PA y, por tanto, su punto medio es el propio punto P que, como se ha dicho recorre el lado BC.

2. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AB. Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB.	
 	El Lugar Geométrico coincide con la recta paralela al lado BC por el punto A ya que: $\measuredangle BCA = \frac{1}{2}\measuredangle UPV = \measuredangle L_2PV$ $\measuredangle BCA = \measuredangle L_2PVP = \measuredangle L_2AV$ $\measuredangle BCA = \measuredangle L_2AV$

3. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AC. Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC.



El Lugar Geométrico coincide con la recta paralela al lado BC por el punto A ya que:

$\measuredangle VBU = \pi - \measuredangle ABC$

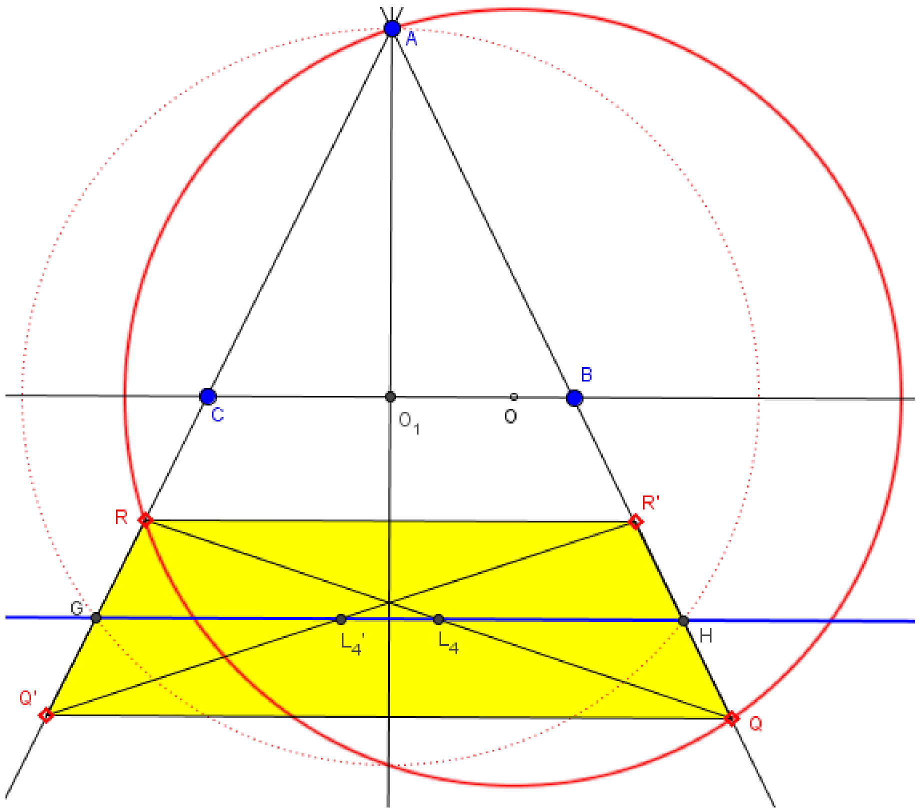
$\measuredangle VPU = 2\measuredangle ABC$

$\measuredangle L_3PV = \measuredangle ABC \rightarrow$

$\measuredangle L_3VP = \measuredangle L_3AP$

$\measuredangle L_3AP = \measuredangle BCA$

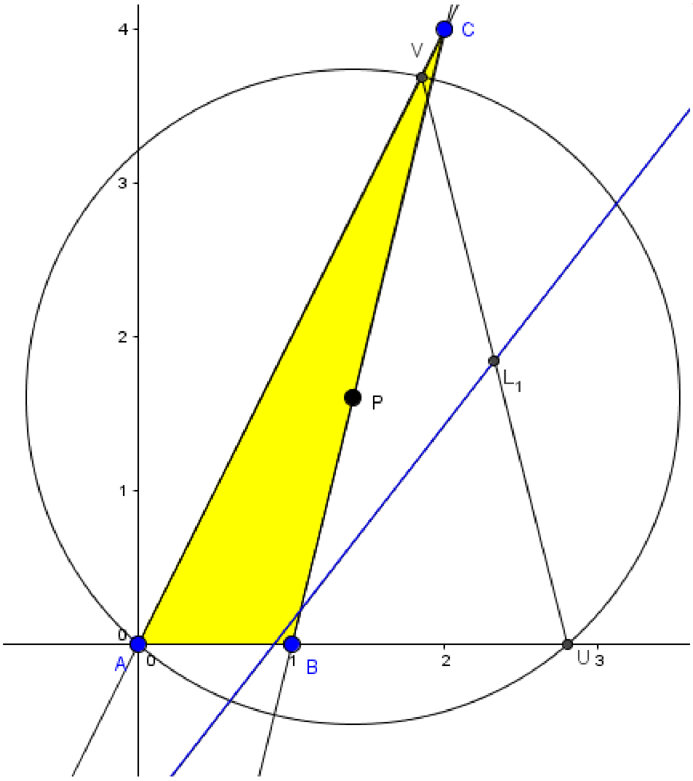
4. Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR.



El Lugar Geométrico coincide con la recta paralela al lado BC por los puntos donde la circunferencia de centro, $O_1, punto\ medio\ de\ BC$, y radio O_1A corta a los lados $AB\ (H)\ y\ AC(G)$ ya que, por la simetría que proporciona la mediatriz de la base del triángulo isósceles, podemos construir un trapecio isósceles $RR'QQ'$ y los puntos del Lugar considerado estarán situados en la paralela media de dicho trapecio.

5. Dado el triángulo $A(0,0), B(1,0), C(2,4)$, hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1, 2 y 3.

LUGAR GEOMÉTRICO 1: $9x - 7y = 8$



Recta BC : → y == 4 x - 4 → P == {t, 4 t - 4}

Recta AC : → y == 2 x

Recta AB : → y == 0

Circunferencia de Centro P y radio PA : → (x - t) ^2 + (y - (4 t - 4)) ^2 == t^2 + (4 t - 4) ^2

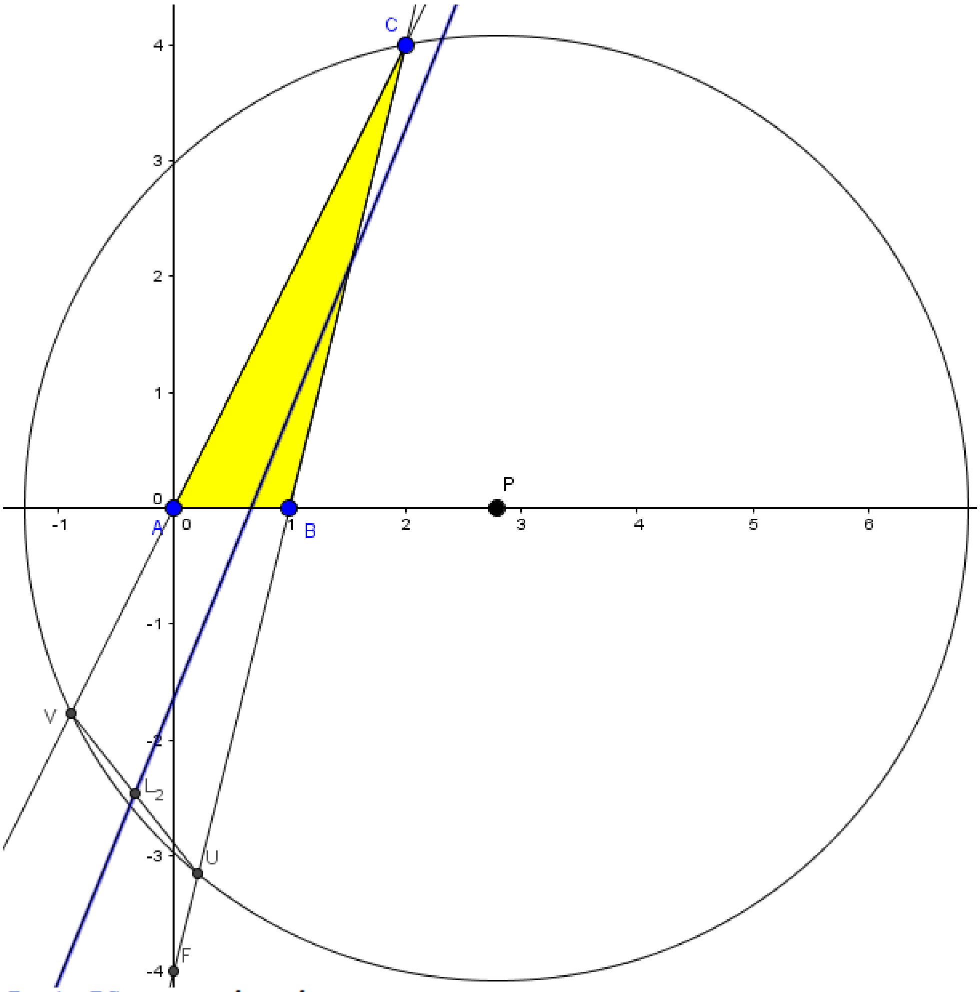
Solve[{(x - t) ^2 + (y - (4 t - 4)) ^2 == t^2 + (4 t - 4) ^2, y == 0}, {x, y}] → U == {2 t, 0}

Solve[{(x - t) ^2 + (y - (4 t - 4)) ^2 == t^2 + (4 t - 4) ^2, y == 2 x}, {x, y}] → $V == \left\{\frac{2}{5}(-8+9t), \frac{4}{5}(-8+9t)\right\}$

$L_1 == \frac{1}{2}\{2t, 0\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{5}(-8+9t), \frac{4}{5}(-8+9t)\right\} == \left\{\frac{2}{5}(-4+7t), \frac{2}{5}(-8+9t)\right\}$

L_1 : {9 x - 7 y == 8}

LUGAR GEOMÉTRICO 2: $27x - 11y = 18$



Recta BC : $\rightarrow y == 4x - 4$

Recta AC : $\rightarrow y == 2x$

Recta AB : $\rightarrow y == 0 \rightarrow P == \{t, 0\}$

Circunferencia de Centro P y radio PC : $\rightarrow (x - t)^\wedge 2 + y^\wedge 2 == (t - 2)^\wedge 2 + 4^\wedge 2$

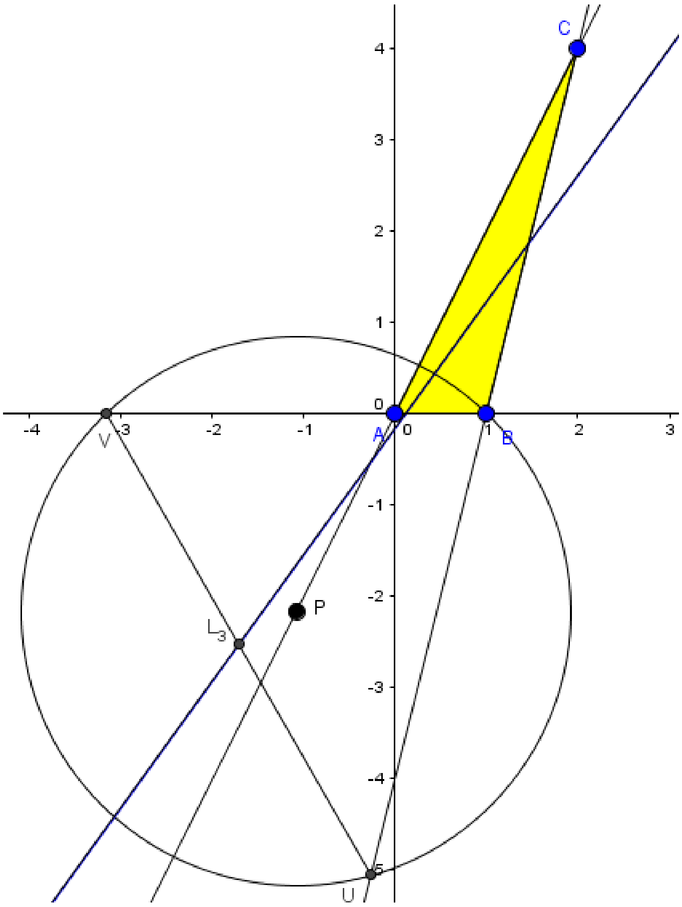
$$\text{Solve}[\{(x - t)^\wedge 2 + y^\wedge 2 == (t - 2)^\wedge 2 + 4^\wedge 2,\ y == 4x - 4\}, \{x, y\}] \rightarrow U == \left\{\frac{2}{17}(-1 + t),\ \frac{4}{17}(-19 + 2t)\right\}$$

$$\text{Solve}[\{(x - t)^\wedge 2 + y^\wedge 2 == (t - 2)^\wedge 2 + 4^\wedge 2,\ y == 2x\}, \{x, y\}] \rightarrow V == \left\{\frac{2}{5}(-5 + t),\ \frac{4}{5}(-5 + t)\right\}$$

$$L_2 == \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{17}(-1 + t),\ \frac{4}{17}(-19 + 2t)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{5}(-5 + t),\ \frac{4}{5}(-5 + t)\right\} == \left\{\frac{2}{85}(-45 + 11t),\ \frac{18}{85}(-20 + 3t)\right\}$$

$L_2 : \{27x - 11y == 18\}$

LUGAR GEOMÉTRICO 3: $18x - 13y = 2$



Recta BC : → $y = 4x - 4$

Recta AC : → $y = 2x$ → $P = \{t, 2t\}$

Recta AB : → $y = 0$

Circunferencia de Centro P y radio PB : → $(x - t)^2 + (y - 2t)^2 = (t - 1)^2 + (2t)^2$

Solve[{(x - t)^2 + (y - 2 t)^2 == (t - 1)^2 + (2 t)^2, y == 4 x - 4}, {x, y}] → $U == \left\{\frac{3}{17}(5 + 6t), \frac{8}{17}(-1 + 9t)\right\}$

Solve[{(x - t)^2 + (y - 2 t)^2 == (t - 1)^2 + (2 t)^2, y == 0}, {x, y}] → $V == \{-1 + 2t, 0\}$

$L_3 == \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{17}(5 + 6t), \frac{8}{17}(-1 + 9t)\right\} + \frac{1}{2}\{-1 + 2t, 0\} == \left\{\frac{1}{17}(-1 + 26t), \frac{4}{17}(-1 + 9t)\right\}$

L_3 : $\{18x - 13y == 2\}$