

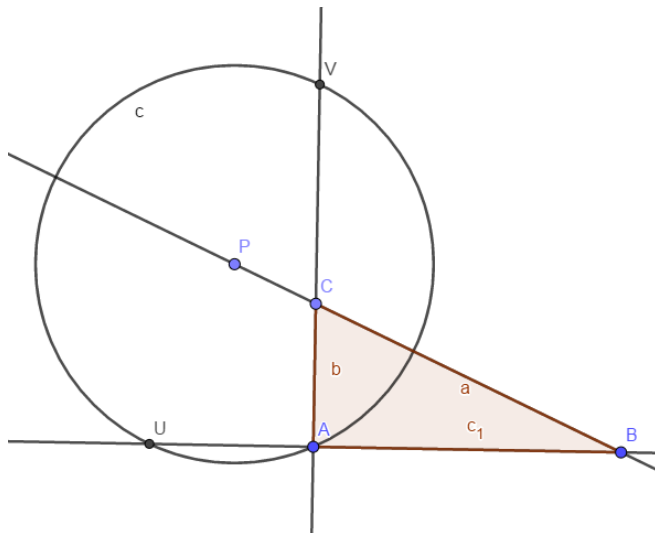
Problema 873

1. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC. Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.
2. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AB. Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB.
3. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AC. Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC.
4. Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR. [Altshiller-Court, N. \(1952\) College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, \(p. 149\)](#)
5. Dado el triángulo A(0,0), B(1,0), C(2,4), hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1., 2. y 3..

Barroso, R. (2018): Comunicación personal de los casos 1., 2. 3., y 5., generalizando el caso 4. de Altshiller- Court,N.

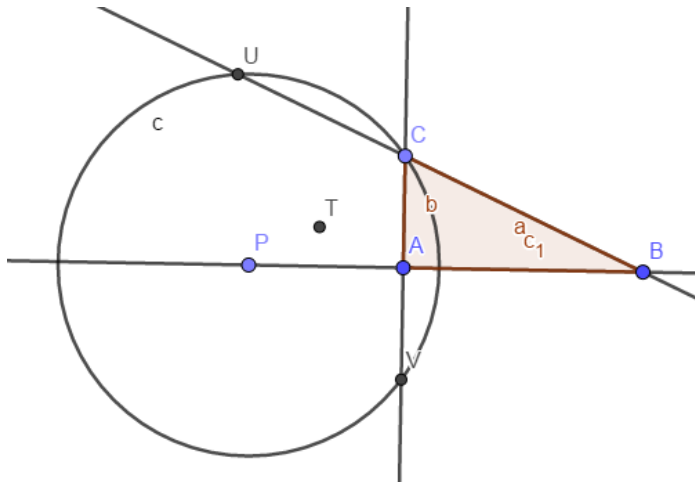
Solución del director.

1. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC. Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.



Al ser UV diámetro de la circunferencia construida, P es el punto medio pedido. Así, el lugar geométrico es la recta CB. Es un automorfismo.

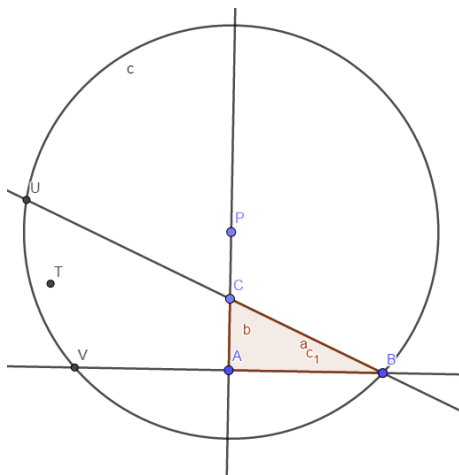
2. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC , consideremos un punto genérico P en la recta AB . Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V . Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB .



V es el simétrico de C respecto a PA .

Si consideramos el triángulo UCV , T es la paralela media de CU . Así el lugar pedido es la recta paralela a la hipotenusa que pasa por A .

3. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC , consideremos un punto genérico P en la recta AC . Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a CA en V . Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC .

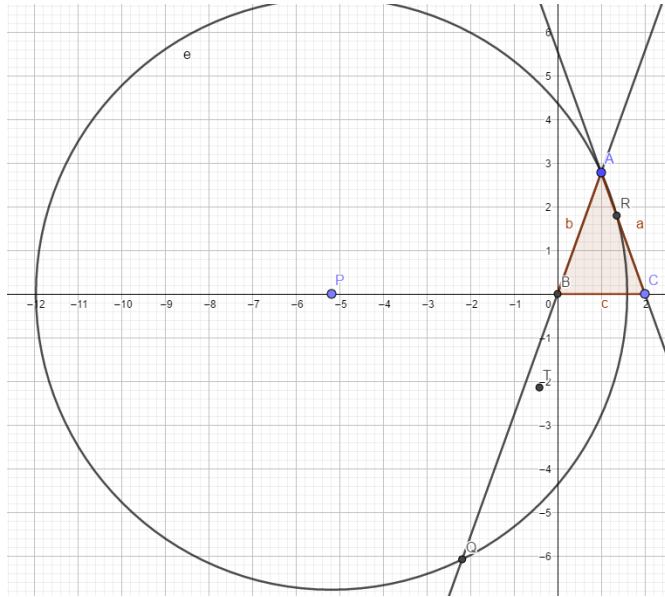


V es el simétrico de B respecto a PA .

Si consideramos el triángulo UVB , tenemos que T es la paralela media de BU , luego el lugar pedido es la recta paralela a la hipotenusa que pasa por el vértice A .

Ambos lugares de los casos b) y c) coinciden.

4. Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR.
Sin pérdida de generalidad tomemos B(0,0), A(1,a), C(2,0).



La circunferencia tiene de ecuación

$$(x - p)^2 + (y - 0)^2 = (1 - p)^2 + (a - 0)^2$$

Es decir, $y^2 + x^2 - 2px - 1 + 2p - a^2 = 0$.

La recta AB es $y=ax$.

Los puntos de intersección de ambas son A(1,a), y $Q(\frac{2p-1-a^2}{1+a^2}, \frac{2pa-a-a^3}{1+a^2})$

La recta AC es $y=-ax+2a$. La intersección con la circunferencia da lugar a

$$A(1,a) \text{ y } R(\frac{3a^2+2p-1}{1+a^2}, \frac{-a^3-2ap+3a}{1+a^2})$$

$$\text{Así el punto medio es } T(\frac{a^2+2p-1}{1+a^2}, \frac{-a^3+a}{a^2+1})$$

De modo que el lugar es la recta $y = \frac{-a^3+a}{a^2+1}$

5. Dado el triángulo A(0,0), B(1,0), C(2,4), hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos a), b) y c).

Comencemos por un punto P en la recta AB

La circunferencia de centro P(p,0) y que contiene a A(2,4) es:

$$(x-p)^2 + y^2 = (2-p)^2 + (4-0)^2$$

$$\text{Es decir, } x^2 - 2px + y^2 + 4p - 20 = 0$$

La intersección con la recta AC, $y=2x$, es:

$$5x^2 - 2px + 4p - 20 = 0$$

Son $x=2$, y $x = \frac{2p-10}{5}$, las soluciones de esta ecuación, de donde los puntos de corte de AC con la circunferencia son C(2,4), y $U(\frac{2p-10}{5}, \frac{4p-20}{5})$

Sea ahora la recta CB: $y = 4x - 4$.

La intersección con la circunferencia dada es:

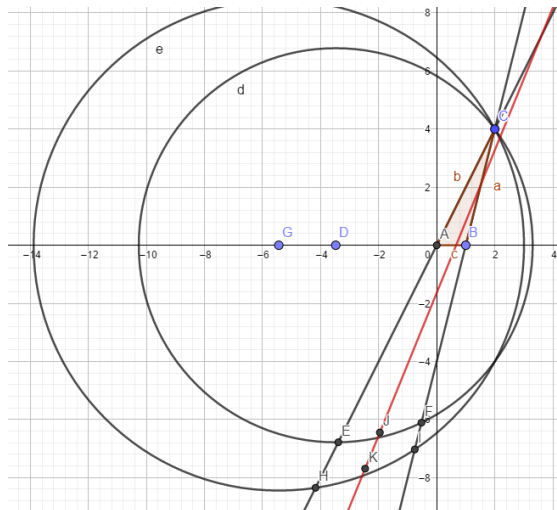
$$17x^2 + (-2p - 32)x + 4p - 4 = 0.$$

Tiene dos soluciones, $x=2$, $x = \frac{2p-2}{17}$, por lo que los puntos de corte son:

$$C(2,4), \text{ y } V(\frac{2p-2}{17}, \frac{4p-4}{17})$$

Así el punto medio de U V es $T(\frac{22p-90}{85}, \frac{54p-360}{85})$

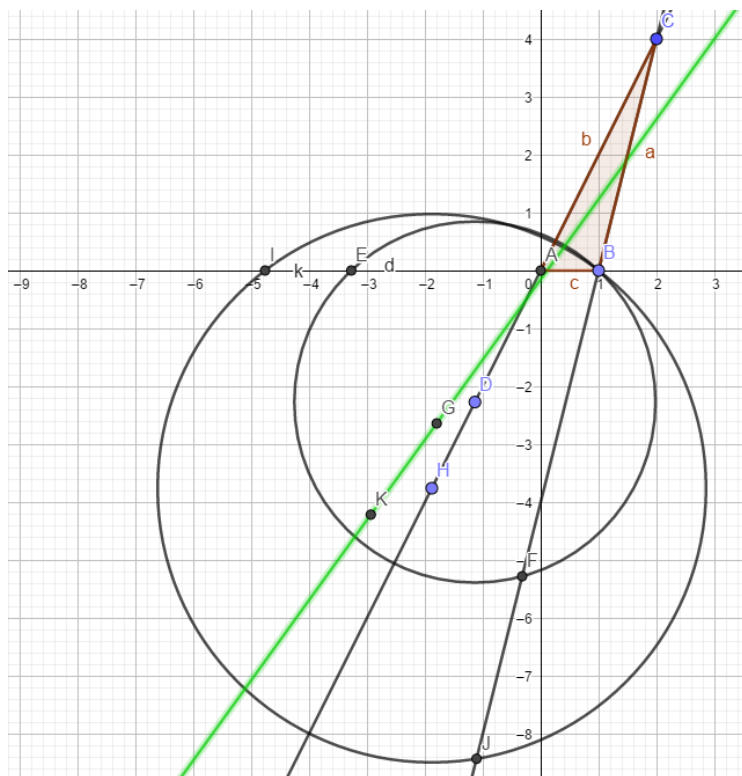
Luego el lugar es una recta: $y = \frac{54}{22}x - \frac{18}{11}$



Por cálculos análogos, para un punto genérico P(p,2p) en la recta AC, obtenemos la circunferencia $y^2 + x^2 - 2px - 4py + 2p - 1 = 0$

Los puntos de corte con las rectas BA y BC son $U(2p-1)$, $V(\frac{18p+15}{17}, \frac{72p-8}{17})$ cuyo punto medio es

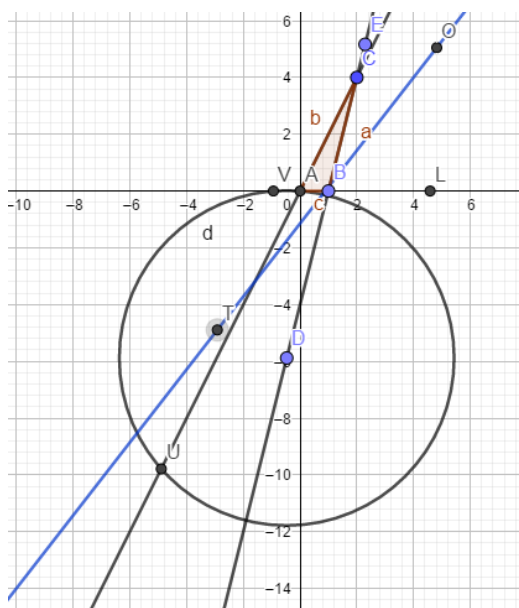
$$T(\frac{26p-1}{17}, \frac{36p-4}{17}), \text{ así el lugar pedido es } y = \frac{36}{26}x - \frac{2}{13}$$



Tomemos un punto genérico sobre la recta BC.
Es $P(p, 4p-p)$.

La circunferencia con centro P y radio PA es:

$$(y - 4p + 4)^2 + (x - p)^2 = (0 - 4p + 4)^2 + (0 - p)^2$$



Hallando la intersección con la recta AB; $y=0$, tenemos $A(0,0)$ y $V((2p,0)$

Con la recta AC, $y=2p$, tenemos $A(0,0)$ y $U(\frac{18p-16}{5}, \frac{36p-32}{5})$.

El punto medio es $T\left(\frac{14p-8}{5}, \frac{18p-16}{5}\right)$, lo que significa que el lugar en este caso es la recta $y = \frac{9}{7}x - \frac{8}{7}$

Ricardo Barroso Campos.
Jubilado. Sevilla. España