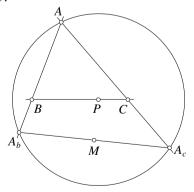
- Problema 873 de triánguloscabri. 1. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC. Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.
 - 2. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AB. Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB.
 - 3. Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AC. Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC.
 - 4. Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR. ¹
 - 5. Dado el triángulo A(0,0), B(1,0), C(2,4), hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1., 2 .y 3.

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Solución por Francisco Javier García Capitán. Usamos primero las coordenadas baricéntricas para resolver el problema de forma general, y luego lo aplicamos a los diferentes casos propuestos.

PROBLEMA GENERAL

Problema general. Dado un triángulo cualquiera ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC. Tracemos la circunferencia con centro P que pasa por A, y que vuelve a cortar a AB en A_b y a AC en A_c . Hallar el lugar geométrico del punto medio de A_bA_c cuando P recorre la recta BC.



¹Altshiller-Court, N. (1952) College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (p. 149).

Solución. Usando coordenadas baricéntricas, si P = (0 : v : w) obtenemos que el punto medio M de A_bA_c es

$$M = (-(c^{2}v + b^{2}w)S_{A} : b^{2}(c^{2}v + S_{A}w) : c^{2}(b^{2}w + S_{A}v)).$$

Al eliminar v y w que M está sobre la recta ℓ_a de ecuación

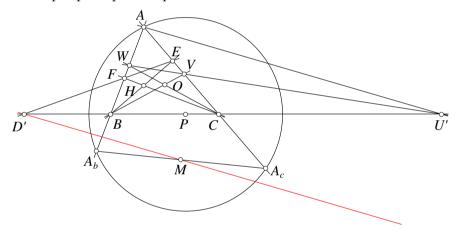
$$(S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B)x + S_A S_B y + S_A S_C z = 0,$$

o bien

$$S^2x + S_AS_By + S_AS_Cz = 0,$$

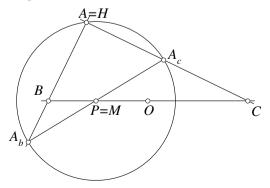
siendo S el doble del área de ABC.

Es posible dar una descripción de esta recta: sean DEF y UVW los triángulos cevianos del ortocentro H y circuncentro O del triángulo ABC. Las rectas EF y VW cortan a BC en los puntos D' y U', conjugados armónicos de D y U respecto de BC. Entonces la recta ℓ_a es la recta que pasa por D' parallela a AU'.

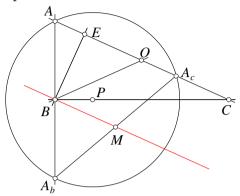


Casos particulares

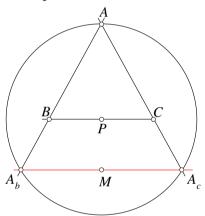
1. Cuando el triángulo ABC es rectángulo con $A=90^{\circ}$, P es el punto medio de A_bA_c , ya que al ser $A=90^{\circ}$, A_bA_c es un diámetro de la circunferencia centrada en P que pasa por A. Por tanto, el lugar de M es la recta BC.



2. Cuando el triángulo ABC es rectángulo con $B=90^\circ$, tenemos B=H=F=D', A=W, C=U' y O=V. Entonces la recta ℓ es la paralela por B a AC.



3. Cuando el triángulo ABC es isósceles, tanto D' como U' son el punto del infinito de la recta BC, por lo que ℓ es una recta paralela a BC. Para trazarla, hallamos el punto M correspondiente al caso en que P es el punto medio de BC.



OTRA GENERALIZACIÓN

Si en lugar de variar P sobre la recta BC: x=0, lo hace sobre cualquier otra recta, de ecuación px+qy+rz=0 entonces M también varía sobre otra recta, de ecuación

$$S^{2}px + (S_{A}S_{B}p + (S_{A}^{2} + S^{2})q - (S_{A}^{2} + S_{A}S_{B})r)y + (S_{A}S_{C}p - (S_{A}^{2} + S_{A}S_{C})q + (S_{A}^{2} + S^{2})r)z = 0.$$