

Problema 873 de triángulos cabri.

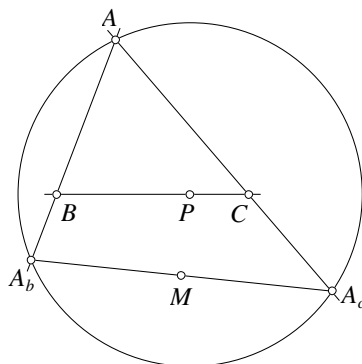
1. Dado un triángulo rectángulo en A , ABC , consideremos un punto genérico P en la recta BC . Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V . Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC .
2. Dado un triángulo rectángulo en A , ABC , consideremos un punto genérico P en la recta AB . Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V . Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB .
3. Dado un triángulo rectángulo en A , ABC , consideremos un punto genérico P en la recta AC . Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V . Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC .
4. Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A , cortando a los lados AB , AC en Q , R . Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR .¹
5. Dado el triángulo $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,4)$, hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1., 2. y 3.

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Solución por Francisco Javier García Capitán. Usamos primero las coordenadas baricéntricas para resolver el problema de forma general, y luego lo aplicamos a los diferentes casos propuestos.

PROBLEMA GENERAL

Problema general. Dado un triángulo cualquiera ABC , consideremos un punto genérico P en la recta BC . Tracemos la circunferencia con centro P que pasa por A , y que vuelve a cortar a AB en A_b y a AC en A_c . Hallar el lugar geométrico del punto medio de A_bA_c cuando P recorre la recta BC .



¹Altshiller-Court, N. (1952) College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (p. 149).

Solución. Usando coordenadas baricéntricas, si $P = (0 : v : w)$ obtenemos que el punto medio M de A_bA_c es

$$M = (-(c^2v + b^2w)S_A : b^2(c^2v + S_Aw) : c^2(b^2w + S_Av)).$$

Al eliminar v y w que M está sobre la recta ℓ_a de ecuación

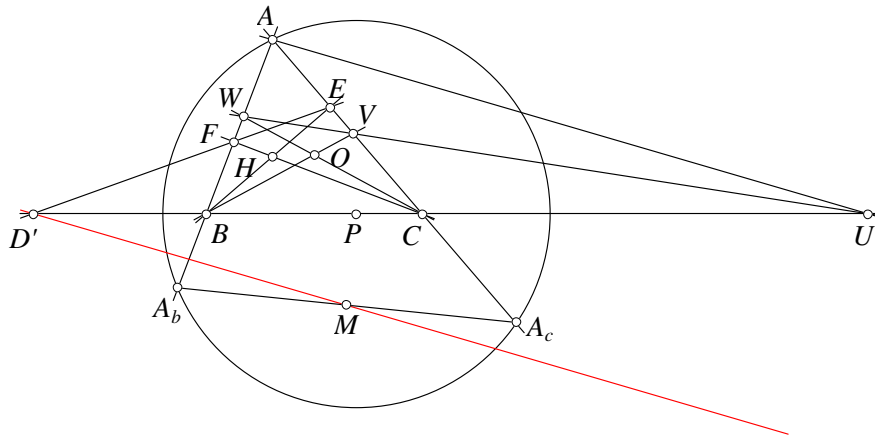
$$(S_BS_C + S_CS_A + S_AS_B)x + S_AS_By + S_AS_Cz = 0,$$

o bien

$$S^2x + S_AS_By + S_AS_Cz = 0,$$

siendo S el doble del área de ABC .

Es posible dar una descripción de esta recta: sean DEF y UVW los triángulos cevianos del ortocentro H y circuncentro O del triángulo ABC . Las rectas EF y VW cortan a BC en los puntos D' y U' , conjugados armónicos de D y U respecto de BC . Entonces la recta ℓ_a es la recta que pasa por D' paralela a AU' .



CASOS PARTICULARES

1. Cuando el triángulo ABC es rectángulo con $A = 90^\circ$, P es el punto medio de A_bA_c , ya que al ser $A = 90^\circ$, A_bA_c es un diámetro de la circunferencia centrada en P que pasa por A . Por tanto, el lugar de M es la recta BC .

