Problema n°873

Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC. Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.

Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AB. Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB.

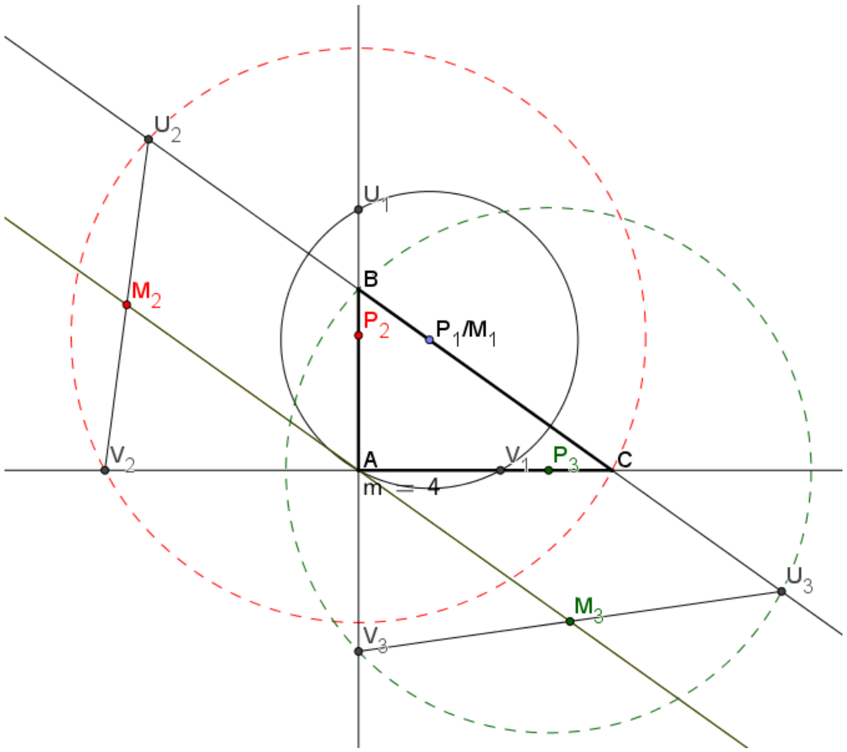
Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AC. Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC.

Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR. Altshiller-Court, N. (1952) College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (p. 149)

Dado el triángulo A(0,0), B(1,0), C(2,4), hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1., 2 .y 3.

Barroso, R. (2018): Comunicación personal de los casos 1., 2. 3, y 5., generalizando el caso d) de Altshiller- Court,N.

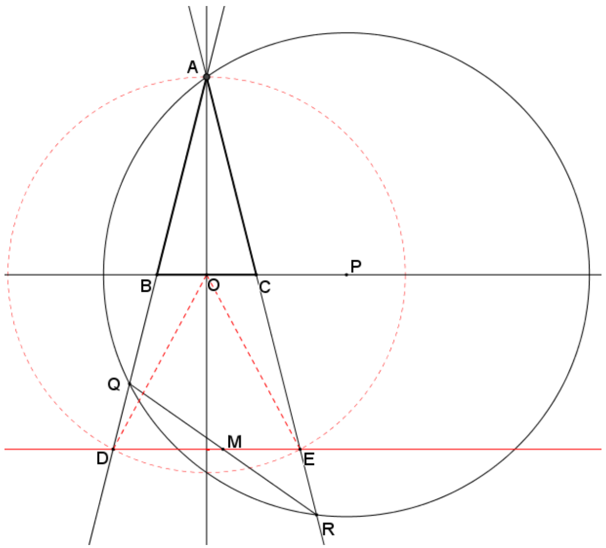
Solution proposée par Philippe Fondanaiche



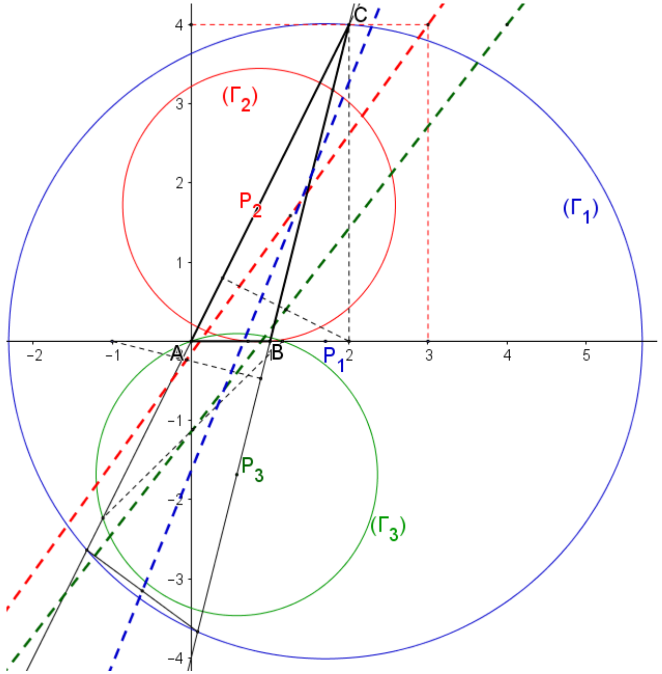
Soit P_1 un point courant de la droite (BC).Le cercle de centre P_1 et de rayon P_1A coupe les droites (AB) et (AC) aux points U_1 et V_1. Le triangle U_1AV_1 est rectangle en A et le segment U_1V_1 en est l'hypoténuse. Le milieu M_1 de U_1V_1 est donc confondu avec P_1 et quand ce point parcourt la droite (BC), le lieu de M_1 est donc **la droite (BC)** elle-même.

Soit P_2 un point courant de la droite (AB). Le cercle de centre P_2 et de rayon P_2A coupe les droites (BC) et (AC) aux points U_2 et V_2. Comme la droite (AB) est la médiatrice de CV_2, A est le milieu de CV_2. Soit M_2 le milieu du segment U_2V_2. D'après le théorème de Thalès,AM_2 est parallèle à BC. Quand P parcourt la droite (AB), le lieu de M_2 est donc **la parallèle à la droite (BC) passant par A**.

Soit P_3 un point courant de la droite (AB). Le cercle de centre P_3 et de rayon P_3A coupe les droites (BC) et (AC) aux points U_3 et V_3. Soit M_3 le milieu de U_3V_3. Le lieu de M_3 est le même que celui de M_2 **la parallèle à la droite (BC) passant par A**.



Dans le repére cartésien Oxy, on trace, sans perte de généralité, le triangle ABC dont les coordonnées des sommets sont: $A(0,u)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$.
Les droites AB et AC ont pour équations: $(AB) : y = u(x + 1)$ et $(AC) : y = -u(x - 1)$.
Soit P un point courant de l'axe des abscisses de coordonnées $(t,0)$. Le cercle (Γ) de centre P et de rayon PA a pour équation : $x^2 + y^2 - 2tx - u^2 = 0$.
On en déduit les coordonnées des points Q et R à l'intersection de ce cercle avec les droites (AB) et (AC).
$Q : x = 2(t - u^2) / (1 + u^2) \quad y = u(2t + 1 - u^2) / (1 + u^2)$
$R : x = 2(t + u^2) / (1 + u^2) \quad y = u(-2t + 1 - u^2) / (1 + u^2)$
D'où les coordonnées du milieu M de QR :
$M : x = 2t/(1 + u^2) \; y = u(1 - u^2) / (1 + u^2) = \text{constante}$.
L'ordonnée de M étant constante, le lieu de ce point est la parallèle à l'axe des abscisses située à une distance égale à $u(1 - u^2) / (1 + u^2)$. On construit aisément cette droite, en traçant le cercle de centre O et de rayon OA qui coupe les droites (AB) et (AC) aux points D et E. **La droite (DE) est le lieu cherché**.



Dans le repère cartésien Oxy, les coordonnées des sommets du triangle ABC sont: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,4)$.
D'où l'équation de la droite (AC) : $y = 2x$ et celle de la droite (BC) : $y = 4(x - 1)$.
Soit P_1 un point courant de la droite (AB) de coordonnées $(t,0)$.
D'où l'équation du cercle (Γ_1) de centre P_1 et de rayon P_1C : $x^2 + y^2 - 2tx + 4(t - 5) = 0$
Les coordonnées de Q_1 et de R_1 à l'intersection de ce cercle et des droites (AC) et (BC) sont alors.
$Q_1 : x = 2(t - 5) / 5$ et $y = 4(t - 5) / 5$ et R_1: $x = 2(t - 1) / 7$ et $y = 4(t - 19) / 17$
On en déduit les coordonnées du milieu M_1 de Q_1R_1 : $2(11t - 45) / 85$ et $18(3t - 20) / 85$.
Le lieu de M_1 est alors la droite d'équation $Y = 9(3X - 2)/11$ (voir ci-contre la droite en pointillés bleus)
La construction de cette droite se fait aisément en considérant les positions de Q_1 et de R_1 quand P_1 est en A puis en B. Quand P_1 est en A, on trace C_1 diamétralement opposé à C sur le cercle (Γ_1). La droite(CB) coupe le cercle (Γ_1) en un point B_1 et le point M_1 est le milieu de B_1C_1. On opère de la même manière quand P_1 est en B.

Des calculs du même type sont effectués pour déterminer le lieu du point M_2 milieu des points Q_2 et R_2 à l'intersection des droites (AB) et (BC) avec le cercle (Γ_2) de centre P_2 situé sur la droite (AC).On obtient la **droite d'équation $Y = 2(9X - 1)/13$ (voir ci-contre en pointillés rouges)** que l'on construit en déterminant les positions de M_2 quand P_2 est en A puis en C.
Même conclusion pour le lieu du point M_3 milieu des points Q_3 et R_3 à l'intersection des droites (AB) et (AC) avec le cercle (Γ_3) de centre P_3 situé sur la droite (BC).On obtient **la droite d'équation $Y = (9X - 8)/7$ (voir ci-contre en pointillés verts)** que l'on construit en déterminant les positions de M_3 quand P_3 est en B puis en C.