Quincena del 1 al 15 de Abril de 2018.

***Problema* 873**.-

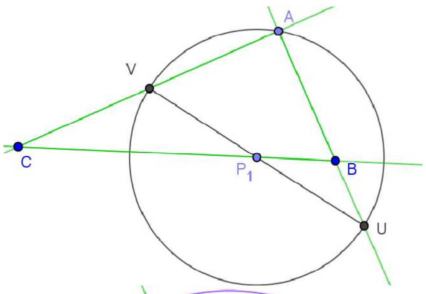
1. *Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta BC. Tracemos la circunferencia PA que corta a las rectas AB en U y a AC en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta BC.*
2. *Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AB. Tracemos la circunferencia PC que corta a las rectas CB en U y a CA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AB.*
3. *Dado un triángulo rectángulo en A, ABC, consideremos un punto genérico P en la recta AC. Tracemos la circunferencia PB que corta a las rectas BC en U y a BA en V. Hallar el lugar geométrico del punto medio de UV cuando P recorre la recta AC.*
4. *Una circunferencia variable tiene su centro sobre la base BC de un triángulo isósceles ABC y contiene el punto A, cortando a los lados AB, AC en Q, R. Hallar el lugar geométrico del punto medio de QR.*

Altshiller-Court, N. (1952) College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. Enl. New York: Barnes and Noble, (p. 149)

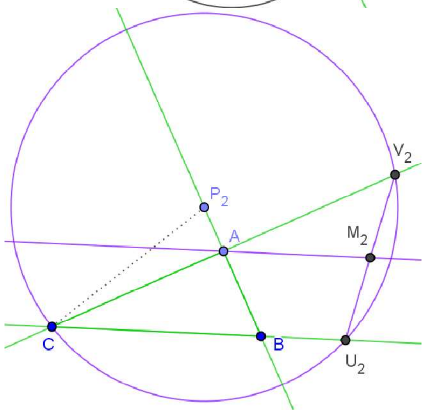
5. *Dado el triángulo* $A(0,0), B(1,0), C(2,4)$, *hallar los tres lugares geométricos análogos a los citados en los casos 1., 2 .y 3.*

Barroso, R. (2018): Comunicación personal de los casos 1., 2. 3, y 5., generalizando el caso d) de Altshiller- Court,N.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



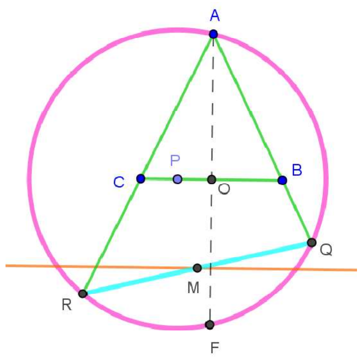
1. Al ser rectángulo en A, los puntos U, V son diametralmente opuestos, por tanto el punto medio es P y el lugar geométrico es la recta BC.



2. AB es la mediatriz de CV_2, (P_2B es un diámetro perpendicular a CV_2), por tanto A es el punto medio de CV_2, y resulta que AM_2 es la paralela media del triángulo CU_2V_2 , y el lugar geométrico es la recta paralela a BC por A.

3. Es análogo a 2. Se cambia B por C. AC es la mediatriz deBV_3, (es un diámetro de la c. circunscrita a BU_3V_3 y perpendicular a BV_3) por tanto AM_3 es paralelo a BC. El lugar geométrico es la paralela a BC por A.

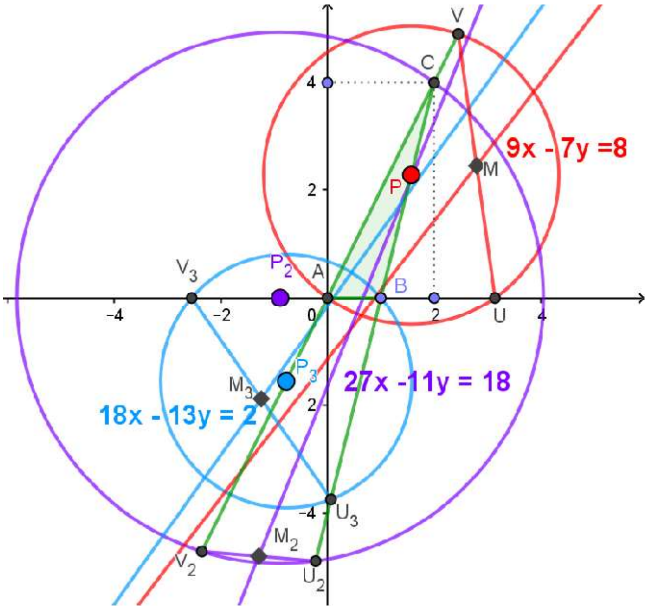
4. Tomando como origen de coordenadas el punto medio O de BC y $A(0,1)$; recta $CA: y = mx + 1$;recta $BA: y = -mx + 1$; la circunferencia de centro $P(\lambda, 0)$ y radio PA es $x^2 + y^2 - 1 - 2\lambda x = 0$.



Esta circunferencia determina con las rectas BA y CA los puntos $Q = \left(\frac{2(\lambda+m)}{1+m^2}, -\frac{m^2+2\lambda m-}{1+m^2}\right)$ y, cambiando m por $-m$, $R = \left(\frac{2(\lambda-m)}{1+m^2}, -\frac{m^2-2\lambda m-1}{1+m^2}\right)$.

Las coordenadas del punto medio del segmento QR se obtienen de la semisuma de las coordenadas de los extremos, así pues, $M = \left(\frac{2\lambda}{1+m^2}, \frac{1-m^2}{1+m^2}\right)$. Es inmediato observar que al variar el parámetro λ, el punto en cuestión describe la recta de ecuación $y = \frac{1-m^2}{1+m^2}$, paralela al lado BC del triángulo.

5. Con esos datos tenemos para las rectas que definen el triángulo las ecuaciones $AB: y = 0; AC: y = 2x; BC: y = 4x - 4$.



Para el primer lugar tenemos la circunferencia de centro $P(\lambda, 4\lambda - 4)$ y radio PA con ecuación

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 8(\lambda - 1)y = 0,$$

que corta a la recta AC en el punto A y en $V = \left(\frac{18\lambda-16}{5}, \frac{36\lambda-32}{5}\right)$ y a AB en A y en $U = (2\lambda, 0)$.

El punto medio del segmento UV es el punto cuyas coordenadas son $M = \frac{1}{5}(14\lambda - 8{,}18\lambda - 16)$.

Es inmediato que al variar P este punto M recorre una recta con dirección la del vector (7,9) y que pasa por el punto $\left(\frac{-8}{5}, \frac{-16}{5}\right)$. Después de simplificar la ecuación de esta recta (en rojo) es $\mathbf{9x - 7y = 8}$.

Para el segundo lugar tomando sobre la recta AB el punto $P_2 = (\lambda, 0)$, la ecuación de la circunferencia de centro este punto y que pasa por C es $(x - \lambda)^2 + y^2 = (2 - \lambda)^2 + 4^2$. La intersección con BC nos da, además de B, el punto $U_2 = \frac{2}{17}(\lambda - 1{,}4\lambda - 38)$ y en la recta CA nos deja el punto $V_2 = \frac{2(\lambda-5)}{5}(1{,}2)$. El punto medio de U_2V_2 es $M_2 = \frac{2}{85}(11\lambda - 45, 27\lambda - 180)$.

Este punto describe al variar el parámetro λ una recta de vector (11,17) que pasa por el to$\left(\frac{-18}{17}, \frac{-7}{17}\right)$. Su ecuación es $\mathbf{27x - 11y = 18}$ (color morado).

Por último, para el tercer lugar donde $P_3 = (\lambda, 2\lambda)$, sobre la recta AC, la circunferencia centrada en él y que pasa por B tiene ecuación $(x - \lambda)^2 + (y - 2\lambda)^2 = (1 - \lambda)^2 + 4\lambda^2$.
Sobre BC nos deja el punto $U_3 = \frac{1}{17}(18\lambda + 15{,}72\lambda - 8)$. En BA obtenemos el punto $V_3 = (2\lambda - 1{,}0)$.

El punto que define el lugar geométrico es $M_3 = \frac{1}{17}(26\lambda - 1{,}36\lambda - 4)$, que se mueve sobre la recta (en azul) de vector (13,18) y que pasa por el punto $\left(\frac{-1}{17}, \frac{-4}{17}\right)$. La ecuación en coordenadas cartesianas de esta recta es $\mathbf{18x - 13y = 2}$. ■