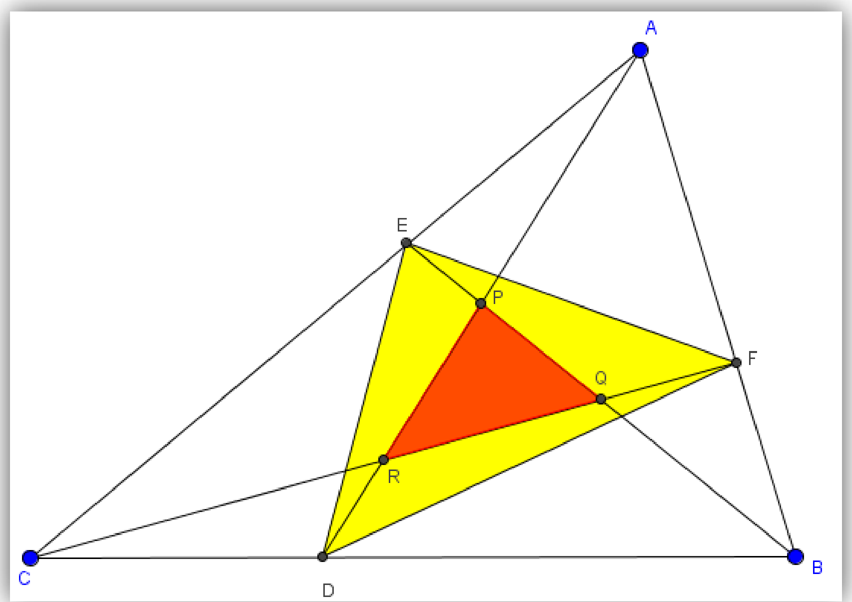
Problema 874.-
Sea r un número real y $D, E\ y\ F$ puntos sobre los lados $BC, CA\ y\ AB$ de un triángulo ABC tal que $BD/DC = CE/EA = AF/FB = r$. Las cevianas $AD, BE\ y\ CF$ limitan un triángulo PQR cuya área es $[PQR]$. Hallar el valor de r para el cual la relación de áreas $[DEF]/[PQR]\ es\ 4$.

Ligouras, P. (2011): Crux Mathematicorum (37-1). Pg. 50

Con permiso de su autor, a quien agradezco la gentileza. Propuesto por Jean Louis Aymé.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Según el enunciado, tenemos que los segmentos determinados por las distintas cevianas serán, respectivamente: $\left\{BD = \frac{ar}{r+1}; DC = \frac{a}{r+1}\right\}; \left\{CE = \frac{br}{r+1}; EA = \frac{b}{r+1}\right\}; \{AF = \frac{cr}{r+1}; FB = \frac{c}{r+1}\}$

Entonces, $[CDE] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{r+1} \cdot \frac{br}{r+1}\ sin\ C = \frac{1}{2} a\ b\ sinC \frac{r}{(r+1)^2} = [ABC]\frac{r}{(r+1)^2}$.

Y del mismo modo, $[AFE] = [BDF] = [CDE] = [ABC]\frac{r}{(r+1)^2}$.

Por tanto, $[DEF] = [ABC] - 3[ABC]\frac{r}{(r+1)^2} = [ABC] \cdot \frac{r^2-r+1}{(r+1)^2}\quad (I)$

Por otro lado, tenemos que, según el Teorema de Menelao aplicado al triángulo ACD por la transversal BE:

$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{AP}{PD} = 1 \rightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{a}{\frac{ar}{r+1}} \frac{AP}{PD} = 1 \rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{r^2}{r+1} \rightarrow AP = PD \cdot \frac{r^2}{r+1}\ ; AP + PD = AD \rightarrow PD = \frac{AD(r+1)}{r^2+r+1}$.

Y como quiera que entonces:

$[APB] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot AP \cdot \sin\measuredangle PAB = \frac{1}{2} \cdot c \cdot PD \cdot \frac{r^2}{r+1} \cdot \sin\measuredangle PAB = \frac{1}{2} \cdot c \cdot AD \cdot \frac{r+1}{r^2+r+1} \cdot \frac{r^2}{r+1}\sin\measuredangle PAB$

En definitiva, $[APB] = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot AD \cdot \sin\measuredangle PAB\right)\frac{r^2}{r^2+r+1} = [ADB]\frac{r^2}{r^2+r+1}$

Ahora bien, $[ADB] = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{ar}{r+1} \cdot c \cdot sinB = [ABC] \cdot \frac{r}{r+1}$

Por tanto, $[BQC] = [CRA] = [ADB] = [ABC] \cdot \frac{r}{r+1}$

En definitiva, $[PQR] = [ABC] - 3[ABC] \cdot \frac{r}{r^2+r+1} = \frac{[ABC](r-1)^2}{r^2+r+1}\quad (II)$

De las igualdades (I) y (II), obtenemos que $\frac{[DEF]}{[PQR]} = \frac{r^2-r+1}{(r+1)^2} \cdot \frac{r^2+r+1}{(r-1)^2} = 4 \rightarrow r^4 - 3r^2 + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$