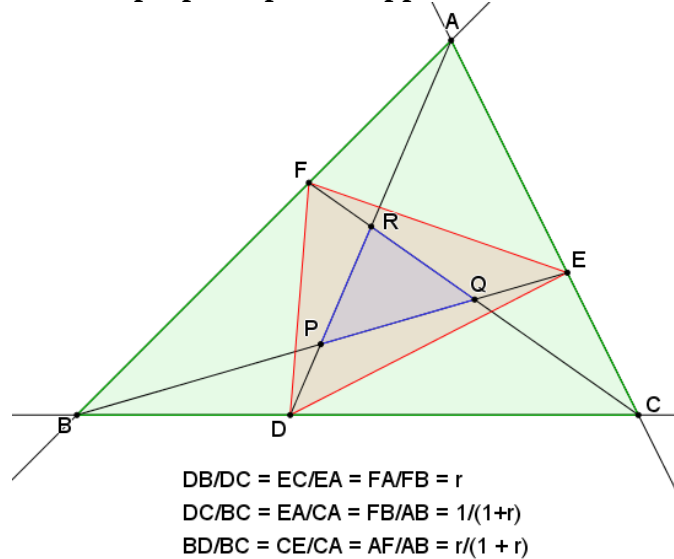


### Problema n°874

3609. Sea  $r$  un número real y  $D, E$  y  $F$  puntos sobre los lados  $BC, CA$  y  $AB$  de un triángulo  $ABC$  tal que  $BD/DC = CE/EA = AF/FB = r$ . Las cevianas  $AD, BE$ , y  $CF$  limitan un triángulo  $PQR$  cuya área es  $[PQR]$ . Hallar el valor de  $r$  para el cual la relación de áreas  $[DEF]/[PQR]$  es 4.

**Ligouras, P. (2011): Crux Mathematicorum (37-1). Pg. 50**

**Solution proposée par Philippe Fondanaiche**



**1<sup>er</sup> cas: les points D,E et F sont intérieurs aux côtés BC,CA et AB.**

On désigne par  $[XYZ]$  l'aire du triangle  $XYZ$  et on pose  $[ABC] = S$

On a la relation  $[DEF] = S - [BDF] - [CED] - [AFE]$

Or  $[BDF] = [BCF] \cdot BD/BC = [BCF] \cdot r/(1+r) = S \cdot FB/AB \cdot r/(1+r) = S \cdot r/(1+r)^2$

De la même manière, on obtient  $[CED] = [AFE] = S \cdot r/(1+r)^2$

D'où  $[DEF] = S(1 - 3r/(1+r)^2) = (1 - r - r^2)S/(1+r)^2$

Par ailleurs, d'après le théorème de Menelaüs, on a  $DB/DC \cdot RC/RF \cdot AF/AB = 1$

D'où  $RC/RF = (1+r)/r^2$  et  $RF/CF = r^2/(1+r+r^2) = PD/AD = QE/BE$

D'où  $[BDP] = [CEQ] = [AFR] = r^2[ACF]/(1+r+r^2)$  avec  $[ACF] = rS/(1+r)$

soit  $[BDP] = [CEQ] = [AFR] = r^3S/(1+r+r^2)(1+r)$

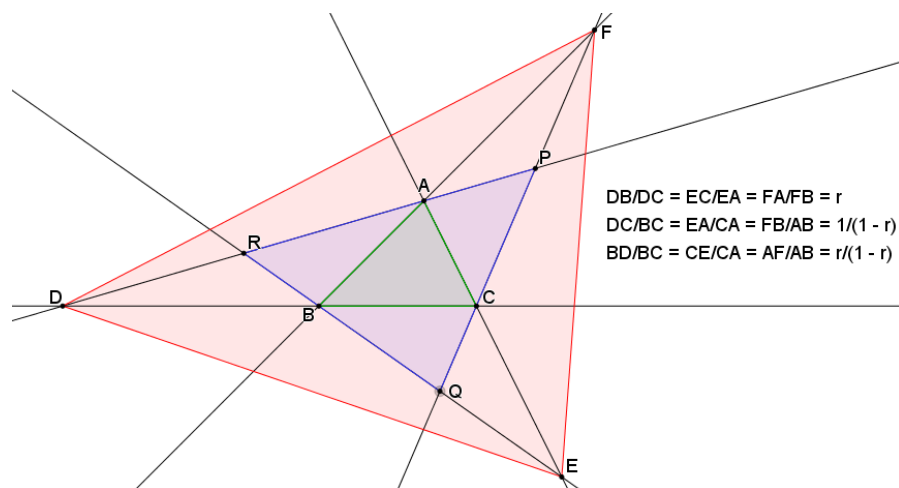
On en déduit  $[PQR] = S - ([ABD] + [BCE] + [CAF]) + [BDP] + [CEQ] + [AFR]$

ce qui donne  $[PQR] = S - 3[ABD] + 3[AFR] = S - 3rS/(1+r) + 3r^3S/(1+r+r^2)(1+r)$

Après développement et simplification, il en résulte  $[DEF]/[PQR] = (1 + r^2 + r^4)/(1 - 2r^2 + r^4)$

Si  $[DEF]/[PQR] = 4$ , alors  $r^4 - 3r^2 + 1 = 0 \implies 2$  solutions:

$$r_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (nombre d'or) et } r_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (inverse du nombre d'or)}$$



**2<sup>ème</sup> cas: les points D,E et F sont extérieurs aux côtés BC,CA et AB.**

Deux configurations sont à considérer : les extrémités du côté  $BC$  et le point  $D$  sont dans l'ordre  $\{D,B,C\}$  ou bien dans l'ordre  $\{B,C,D\}$

Dans chacune d'elles les calculs des aires des triangles  $DEF$  et  $PQR$  sont exactement les mêmes que ceux du premier cas et on aboutit aux résultats suivants:

1) ordre  $\{D,B,C\}$  qui correspond à  $r = DB/DC < 1$ . Le ratio  $[DEF]/[PQR] = 4$  est

$$\text{obtenu pour } r = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

2) ordre  $\{B,C,D\}$  qui correspond à  $r = DB/DC > 1$  et revient à intervertir les points  $B$

et  $C$ . Le ratio  $[DEF]/[PQR] = 4$  est obtenu pour  $r = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$