

Problema 874.-

3609. Sea r un número real y D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC tal que $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = r$. Las cevianas AD, BE , y CF limitan un triángulo PQR cuya área es $[PQR]$. Hallar el valor de r para el cual la relación de áreas $[DEF]/[PQR]$ es 4.

Pg. 50. Ligouras, P. (2011): Crux Mathematicorum (37-1). Pg. 50. Con permiso de su autor, a quien agradezco la gentileza.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1. Solución analítica

Utilizando coordenadas baricéntricas respecto de ABC , tenemos para los puntos D, E y F son las que siguen: $D(0:1:r); E(r:0:1); F(1:r:0)$.

Las ecuaciones de las cevianas son: $AD: ry - z = 0; BE: x - rz = 0$ y $CF: rx - y = 0$.

Con esto ahora calculamos los vértices:

$$R = AD \cap BE = (r^2:1:r); Q = AD \cap CF = (1:r:r^2); P = BE \cap CF = (r:r^2:1).$$

La suma de las coordenadas de estos tres puntos es $r^2 + r + 1 > 0$.

El área (con signo) del triángulo PQR dividida por la de ABC es el valor del determinante formado por las coordenadas absolutas de sus vértices. Análogamente para el triángulo DEF . Así pues, en valor absoluto, tendremos:

$$[PQR] = \left| \frac{1}{(r^2 + r + 1)^3} \begin{vmatrix} r & r^2 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ r^2 & 1 & r \end{vmatrix} \right| = \frac{(r-1)^2}{r^2 + r + 1}$$

Análogamente para el triángulo DEF .

$$[DEF] = \left| \frac{1}{(r+1)^3} \begin{vmatrix} r & r^2 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ r^2 & 1 & r \end{vmatrix} \right| = \frac{r^2 - r + 1}{(r+1)^2}$$

Para el cociente se tiene:

$$\frac{[DEF]}{[PQR]} = 4 = \frac{r^2 - r + 1}{(r+1)^2} \cdot \frac{r^2 + r + 1}{(r-1)^2} = \frac{(r^2 + 1)^2 - r^2}{(r^2 - 1)^2}$$

Esa ecuación es equivalente a

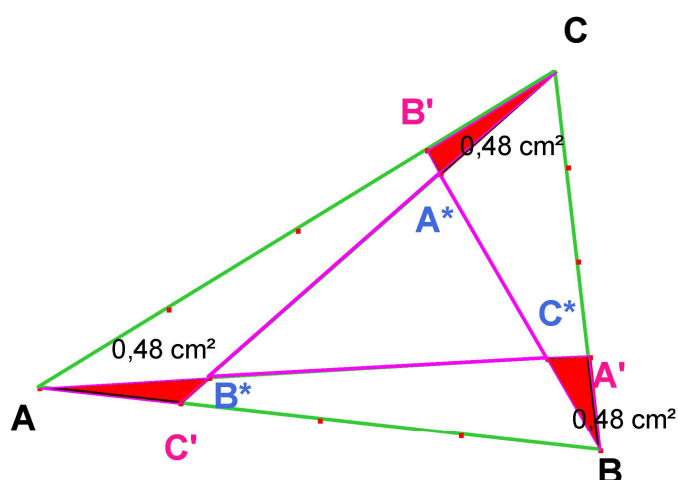
$$(r^2 + 1)^2 - r^2 - 4(r^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow r^4 - 3r^2 + 1 = 0$$

Una solución de esa ecuación es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, el número de oro (y también $\phi' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

2. Cálculo sin coordenadas del área de PQR .

Para aprovechar la solución dada a un caso particular de este problema (el problema 22 de esta revista que se resolvió en enero de 2006) voy a cambiar la notación poniendo $D = A'$; $E = B'$; $F = C'$, así como $P = CF \cap BE = CC' \cap BB' = A^*$, $Q = CF \cap AD = CC' \cap AA' = B^*$; $R = AD \cap BE = AA' \cap BB' = C^*$. (La figura se ha hecho para una división de cada lado del triángulo en cuatro partes iguales).

Aunque r no sea un número natural podemos suponer que *dividimos* los lados del triángulo en $(r + 1)$ partes iguales. Por comodidad llamaremos $n = r + 1$.



El área total de ABC se obtienen sumando al área del central, las áreas de los tres laterales $AC'C$, $CB'B$ y $BA'A$ (los tres de área igual a $1/n$ del total) y restando las áreas de las tres *esquinas*. Aplicando el teorema de Menelao al triángulo BCC' con AA' como transversal se obtiene $(AC'B) \cdot (A'BC) \cdot (B'CC') = 1$. Por la construcción realizada, la primera razón simple vale $1/n$, y la segunda $(A'BC) = \frac{-1}{n-1}$, por tanto de la tercera se obtiene, en valor absoluto,

$$B^*C = n(n-1) \cdot B^*C' \text{ y por tanto } CC' = [n(n-1) + 1]B^*C'$$

(Con las transversales BB' y CC' en los triángulos $AA'C$ y $AB'B$ respectivamente, obtengo de forma similar: $A^*B = n(n-1)A^*B'$ y $C^*A = n(n-1)C^*A'$.)

De todo esto se sigue que el área del triángulo $AC'C$ es $[n(n-1) + 1]$ veces la del triángulo de la esquina $AC'B^*$, y por tanto las *esquinas* tienen igual área.

$$\text{Cálculo de áreas: } [AB^*C'] = \frac{1}{n(n-1)+1} [AC'C] = \frac{1}{n[n(n-1)+1]} [ABC]$$

$$[A^*B^*C^*] = [ABC] + 3 \cdot [AB^*C'] - \frac{3}{n} \cdot [ABC] = \left(1 + \frac{3}{n(n^2-n+1)} - \frac{3}{n}\right) [ABC] =$$

$$\frac{(n-2)^2}{n(n-1)+1} [ABC] = \frac{(r-1)^2}{r^2+r+1} [ABC], \text{ expresión que coincide (salvo un signo) con la obtenida antes para el triángulo } PQR. \blacksquare$$