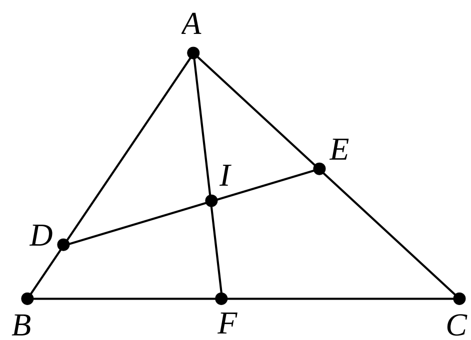
Problema 875. Una recta pasa por el incentro de un triángulo ABC cortando a los lados AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Sea P el punto de intersección de BE y CD. Si X, Y y Z son los respectivos pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, demuestra que:

$$\frac{1}{PX} = \frac{1}{PY} + \frac{1}{PZ}$$

Aymé, J. L. (2018), comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa.



Sea $F = AI \cap BC$. Al aplicar el teorema de la transversal[1] tenemos

$$\frac{BD}{DA} \cdot FC + \frac{CE}{EA} \cdot FB = \frac{FI}{IA} \cdot BC \tag{1}$$

Del teorema de la bisectriz aplicado al triángulo $\triangle ABC$ tenemos

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad BF = \frac{ac}{b+c}, \quad FC = \frac{ab}{b+c} \tag{2}$$

Desde el teorema de la bisectriz aplicado al triángulo $\triangle ABF$, tenemos

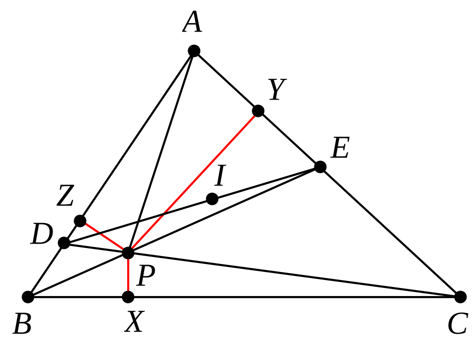
$$\frac{IF}{IA} = \frac{BF}{BA} = \frac{a}{b+c} \tag{3}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{ab}{b+c} + \frac{CE}{EA} \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{a}{b+c} \cdot a \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{BD}{DA} \cdot b + \frac{CE}{EA} \cdot c = a \tag{4}$$

[1]Ver el artículo de Francisco Bellot Rosado, Un théorème peu connu: le théorème des transversales, Mathématique et Pédagogie n. 153, 41-55, 2005



Ahora observamos que

$$\frac{BD}{DA} = \frac{[DBP]}{[DPA]} = \frac{[DBC]}{[DCA]} \quad \frac{BD}{DA} = \frac{[BCP]}{[APC]} = \frac{a \cdot PX}{b \cdot PY} \tag{5}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{[CPE]}{[EPA]} = \frac{[CBE]}{[EBA]} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{[CBP]}{[APB]} = \frac{a \cdot PX}{c \cdot PZ} \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) se deduce que

$$\frac{a \cdot PX}{b \cdot PY} \cdot b + \frac{a \cdot PX}{c \cdot PZ} \cdot c = a \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{PX}{PY} + \frac{PX}{PZ} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{PX} = \frac{1}{PY} + \frac{1}{PZ}$$

$\square$