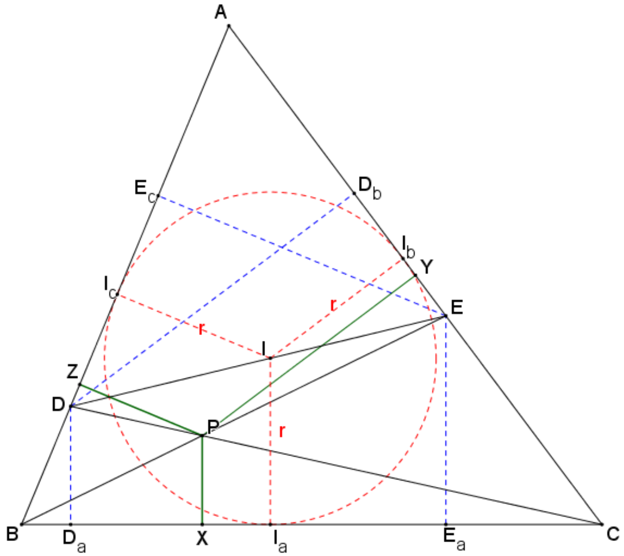
Problema n°875
Una recta que pasa por el incentro de un triángulo ABC cortando a los lados AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Sea P el punto de intersección de BE y CD. Si X, Y y Z son los respectivos pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, demuestra que: 1/PX = 1/PY + 1/PZ.
Aymé, J. L. (2018) : Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



$1^{\text{ère}}$ solution par les coordonnées trilinéaires

Dans un triangle ABC, les sommets A,B,C et le centre I du cercle inscrit sont caractérisés par les coordonnées trilinéaires suivantes: A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) et I(1,1,1).
On sait par ailleurs que toute droite passant par 2 points de coordonnées (a,b,c) et (d,e,f) a pour équation :
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$ où $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ désigne le déterminant des 3 vecteurs de composantes (x,y,z), (a,b,c) et (d,e,f).
Un point D quelconque sur le côté AB a pour coordonnées (p,q,0) et un point E quelconque sur AC a pour coordonnées (u,0,w).La droite DE qui passe par I est telle que:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & 0 \\ u & 0 & w \end{vmatrix} = 0$ D'où qu = (q − p)w et E a pour coordonnées (q − p, 0,q).
Les droites CD et BE ont respectivement pour équations $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ q-p & 0 & q \end{vmatrix} = 0$
D'où py = qx et (q − p)z = qx.
Le point P (x,y,z) à l'intersection des droites CD et BE est tel que qx = py = (q − p)z.
Comme les coordonnées trilinéaires (x,y,z) de P sont égales aux distances PX,PY er PZ, on a 1/PY = 1/y = p/qx et 1/PZ = 1/z = (q − p)/qx . D'où 1/y + 1/z = 1/x , ce qui donne 1/PX = 1/PY + 1/PZ.

$2^{\text{ème}}$ solution par le théorème de Thalès

Soient D_a et D_b les projections de D sur les côtés BC et AC, E_a et E_c les projections de E sur BC et AB, I_a,I_b et I_c les projections de I sur les côtés BC,CA et AB.On pose $II_a = II_b = II_c = r$.
D'après le théorème de Thalès, on a les relations suivantes:
$DI/DE = (r - DD_a)/(EE_a - DD_a) = r/EE_c = (DD_b - r)/DD_b$
Il en résulte que $DD_a/(EE_c - EEa + DD_a) = (DD_b - DDa)/(EEa - DDa + DD_b)$
D'où $EE_a*DD_b + EE_c*DD_a = EE_c*DD_b$ ou encore $EE_a/EE_c + DDa/DD_b = 1$
Par ailleurs $PX/DD_a = PY/DD_b$ et $PX/EE_a = PZ/EE_c$.
D'où PX/PY + PX/PZ = 1 et l'on retrouve la relation 1/PX = 1/PY + 1/PZ