Quincena del 16 al 31 de Abril de 2018.

Problema 875.- Una recta que pasa por el incentro de un triángulo ABC cortando a los lados AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Sea P el punto de intersección de BE y CD. Si X, Y y Z son los respectivos pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, demuestra que:

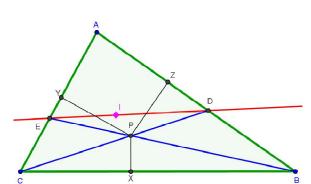
$$\frac{1}{PX} = \frac{1}{PY} + \frac{1}{PZ}.$$

Aymé, J. L. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a utilizar coordenadas trilineales referidas al triángulo ABC.

Su relación con las coordenadas baricéntricas es bien sencilla, si $(\alpha: \beta: \gamma)$ y (x: y: z) son respectivamente las coordenadas trilineales y baricéntricas del mismo punto se verifica:



$$(\alpha:\beta:\gamma) = \left(\frac{x}{a}:\frac{y}{b}:\frac{z}{c}\right)$$

En particular, el incentro, tiene coordenadas trilineales I = (1:1:1).

Para calcular P tomamos un punto E=(t,0,1-t) sobre AC y con él tenemos la recta IE:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ t & 0 & 1 - t \end{vmatrix} = 0$$

Esta recta corta al lado AB, de ecuación

z = 0, en el punto D = (2t - 1: t - 1: 0).

Con D y E tenemos de inmediato las rectas que los unen a C y B respectivamente.

$$r_{CD}$$
: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2t - 1 & t - 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; (t - 1)x - (2t - 1)y = 0$

$$r_{BE}$$
: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 - t \end{vmatrix} = 0;$ $(t-1)x + tz = 0$

El punto P de intersección de estas rectas tiene (en función de x), las coordenadas siguientes:

$$y = \frac{t-1}{2t-1}x$$
; $z = \frac{1-t}{t}x$.

A partir de aquí

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2t-1}{(t-1)x} - \frac{t}{(t-1)x} = \frac{1}{x'}$$

como queríamos demostrar.

(Las coordenadas de P son P = (t(2t-1): t(t-1): (1-t)(2t-1))).