

Quincena del 16 al 31 de Abril de 2018.

Problema 875.- Una recta que pasa por el incentro de un triángulo ABC cortando a los lados AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Sea P el punto de intersección de BE y CD . Si X, Y y Z son los respectivos pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB , demuestra que:

$$\frac{1}{PX} = \frac{1}{PY} + \frac{1}{PZ}.$$

Aymé, J. L. (2018) : Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a utilizar coordenadas trilineales referidas al triángulo ABC .

Su relación con las coordenadas baricéntricas es bien sencilla, si $(\alpha:\beta:\gamma)$ y $(x:y:z)$ son respectivamente las coordenadas trilineales y baricéntricas del mismo punto se verifica:

$$(\alpha:\beta:\gamma) = \left(\frac{x}{a}:\frac{y}{b}:\frac{z}{c}\right)$$

En particular, el incentro, tiene coordenadas trilineales $I = (1:1:1)$.

Para calcular P tomamos un punto $E = (t, 0, 1-t)$ sobre AC y con él tenemos la recta IE :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ t & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

Esta recta corta al lado AB , de ecuación

$z = 0$, en el punto $D = (2t-1:t-1:0)$.

Con D y E tenemos de inmediato las rectas que los unen a C y B respectivamente.

$$r_{CD}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2t-1 & t-1 & 0 \end{vmatrix} = 0; (t-1)x - (2t-1)y = 0$$

$$r_{BE}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0; (t-1)x + tz = 0$$

El punto P de intersección de estas rectas tiene (en función de x), las coordenadas siguientes:

$$y = \frac{t-1}{2t-1}x; z = \frac{1-t}{t}x.$$

A partir de aquí

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2t-1}{(t-1)x} - \frac{t}{(t-1)x} = \frac{1}{x},$$

como queríamos demostrar.

(Las coordenadas de P son $P = (t(2t-1):t(t-1):(1-t)(2t-1))$). ■

