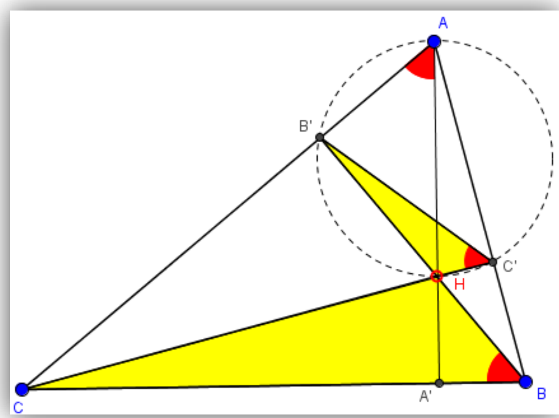
Problema 876.-
Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC consideramos dos puntos variables M y N, respectivamente.
Las circunferencias de diámetros BN y CM se cortan en los puntos P y Q.
Demostrar que las rectas PQ pasan por un punto fijo, independiente de la elección de M y N.

Chiriac, L. Competitive Geometry. Princenton.

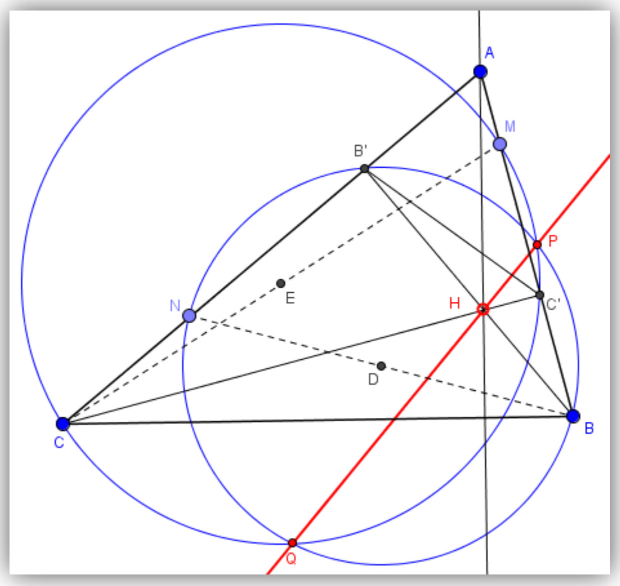
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

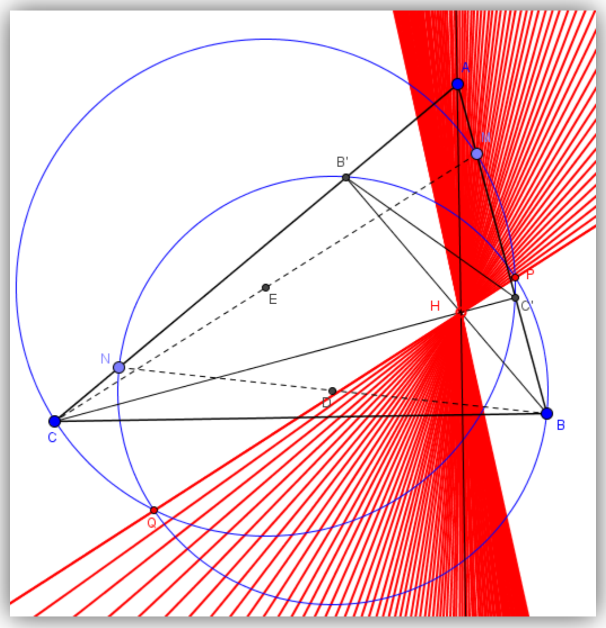


Es conocido el hecho de que en todo triángulo ABC, el ortocentro H determina con sus respectivas alturas BB' y CC' sendos triángulos semejantes HBC y $HB'C'$.
Por tanto, se dará la siguiente relación entre los lados homólogos:

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{HB'}{HC}=\frac{HC'}{HB}\rightarrow HB\cdot HB'=HC\cdot HC'\ (I)$$

Por la propia construcción efectuada, resulta evidente que la recta PQ es el eje radical de ambas circunferencias, las de diámetros BN y CM, respectivamente.
Por tanto, los puntos de dicha recta tendrán la misma potencia respecto a ambas circunferencias.
Resulta evidente que B', pie de la perpendicular trazada al lado AC desde el vértice B, pertenece a la circunferencia de diámetro BN.
Lo mismo ocurrirá con el punto C'. Pertenecerá a la circunferencia de diámetro CM.
En definitiva, los puntos B y B' pertenecen a la primera circunferencia y los puntos C y C' pertenecerán a la segunda.





Ahora bien el punto H, ortocentro del triángulo ABC, verifica (I).
Es decir, $HB\cdot HB'=HC\cdot HC'$ y, consecuentemente, pertenecerá al eje radical de dichas circunferencias.
En definitiva, las rectas PQ siempre pasan por el punto H, ortocentro del triángulo ABC, independiente de lección de M y N.