Problema 876

3.- Problemas propuestos

Problema 1. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC consideramos dos puntos variables M y N, respectivamente.

Las circunferencias de diámetros BN y CM se cortan en los puntos P y Q.

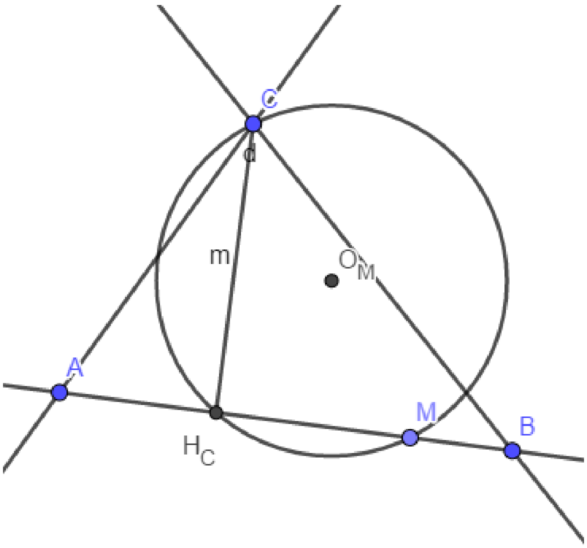
Demostrar que las rectas PQ pasasn por un punto fijo, independiente de la elección de M y N.

Chiriac, L. (2008) : Competitive Geometry. Princenton.

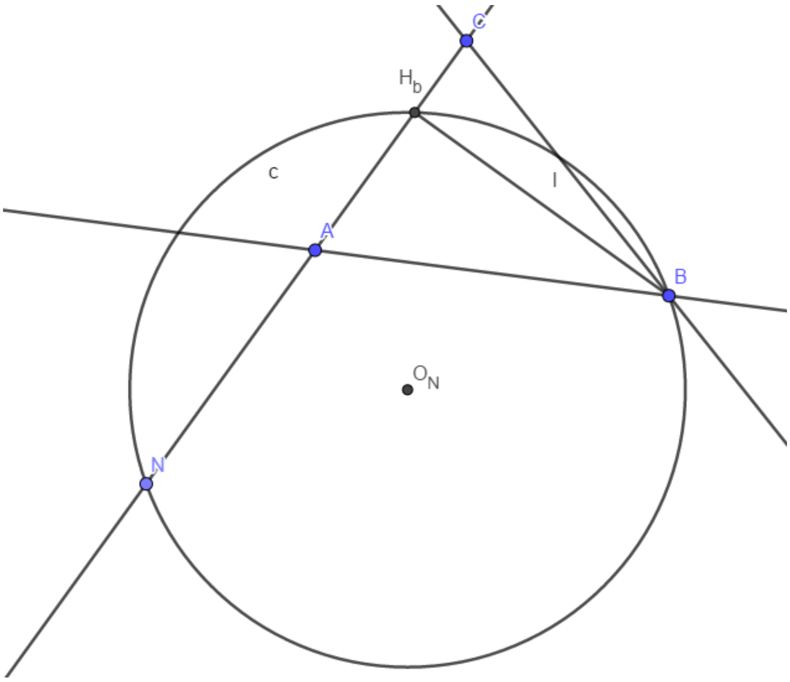
Agradezco a Liubomir Chiriac la gentileza para darme permiso para publicar este problema.

Si en un triángulo cualquiera ABC tomamos un punto M en la recta AB, y trazamos la circunferencia de diámetro CM, cortará a ABC en tres puntos.

Si consideramos la intersección con la recta AB será el punto H_C tal que $<CH_CM=90º=<CH_CB$, de manera que el punto H_C y la cuerda igual a la altura CH_C son constantes para todas las circunferencias.

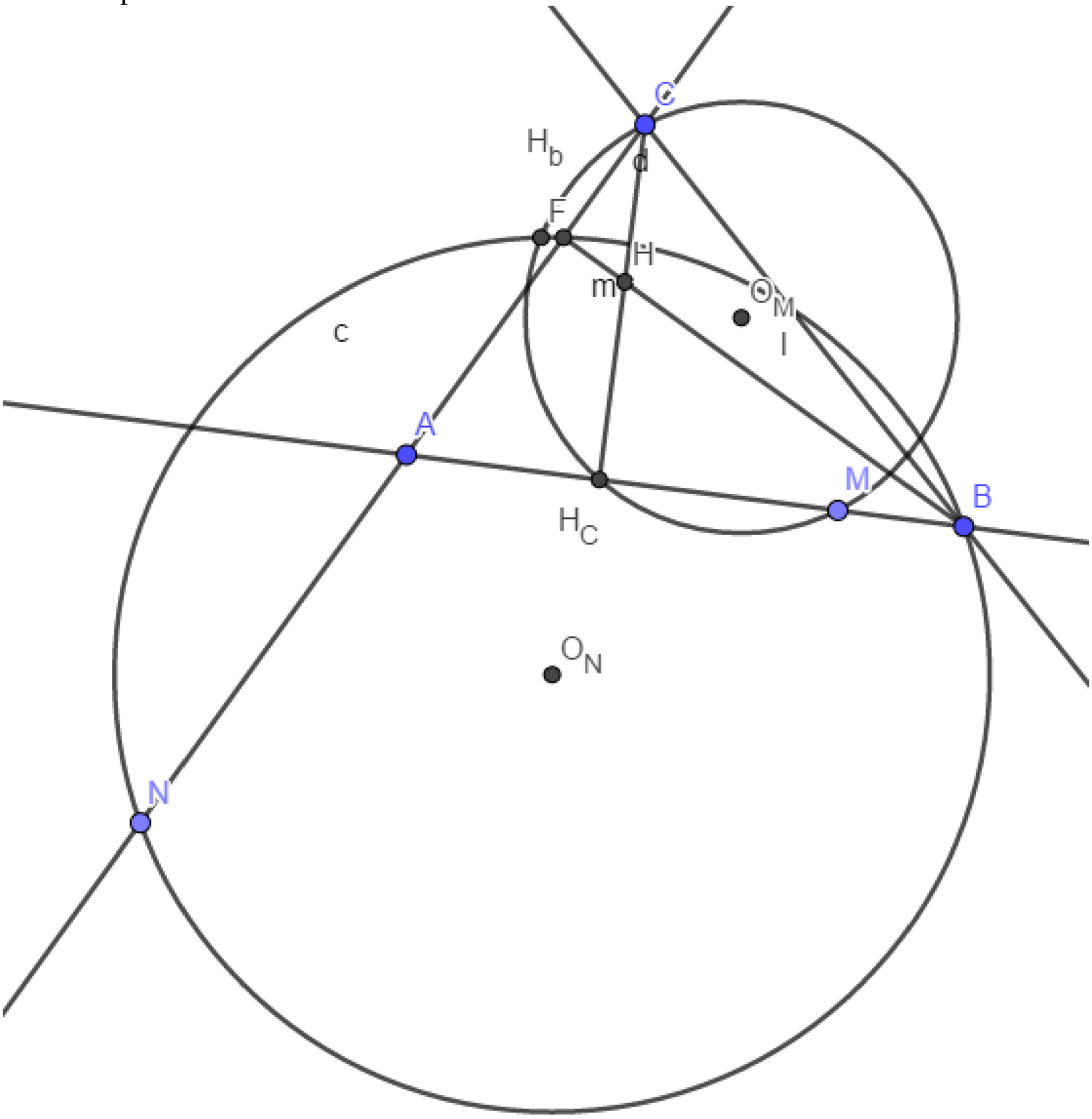


Igualmente en todas las circunferencias de diámetro BN, con N en la recta CA, el punto H_B y la cuerda BH_B son constantes.



Ambas cuerdas se cortan en H, ortocentro de ABC, que sabemos tiene la propiedad de ser HB HH_B= HC HH_C=HA HH_A.

Sea F un punto de corte de ambas circunferencias.



Si consideramos la de centro O_M, y consideramos la cuerda que pasa por H, cortará de nuevo a la misma en U de manera que FH HU=CH H_C =BH H_B=AH H_A de donde

$HU = \frac{AH\ HH_A}{FH}$.

De igual manera, si consideramos para F la cuerda FV de centro O_N llegamos a la conclusión de ser $HV\,\frac{AH\ H\ H_A}{FH}$, con lo que U=V, y es el otro punto de la cuerda común.

Así el ortocentro de ABC es el punto pedido.

Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla. España.