

Problema 876

Sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ del triangle $\triangle ABC$ considerem dos punts variables M i N , respectivament.

Les circumferències de diàmetres $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$ es tallen en els punts P i Q .

Demostreu que les rectes PQ passen per un punt fix, independent de l'elecció de M i N .

Chiriac, L. [*Competitive Geometry*](#). Princeton.

Solució de Ricard Peiró.

La circumferència de diàmetre $\overline{CM}$ talla el costat $\overline{AB}$ en el punt K .

$\angle CKM = 90^\circ$, aleshores, $\overline{CK}$ és altura del triangle $\triangle ABC$.

La circumferència de diàmetre $\overline{BN}$ talla el costat $\overline{AC}$ en el punt L .

$\angle BLN = 90^\circ$, aleshores, $\overline{BL}$ és altura del triangle $\triangle ABC$.

.

La intersecció de les rectes $\overline{CK}$ i $\overline{BL}$ és l'ortocentre H del triangle $\triangle ABC$.

Vegem que H pertany a la recta PQ eix radical de les dues circumferències:

L'ortocentre del triangle compleix que:

$$\overline{AH} \cdot \overline{HK} = \overline{BH} \cdot \overline{HL}.$$

Aleshores, H té la mateixa potència respecte de les dues circumferències, aleshores, H pertany a l'eix radical d'ambdues circumferències.

Aleshores, H és el punt fix.

