

Problema 876

Sobre los lados $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ del triángulo $\triangle ABC$ consideremos dos puntos variables M y N, respectivamente.

Las circunferencias de diámetros $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$ se cortan en los puntos P y Q.

Demostrar que las rectas PQ pasan por un punto fijo, independiente de la elección de M y N.

Chiriac, L. [Competitive Geometry](#). Princeton.

Solución de Ricard Peiró.

La circunferencia de diámetro $\overline{CM}$ corta el lado $\overline{AB}$ en el punto K.

$\angle CKM = 90^\circ$, entonces, $\overline{CK}$ es altura del triángulo $\triangle ABC$.

La circunferencia de diámetro $\overline{BN}$ corta el lado $\overline{AC}$ en el punto L.

$\angle BLN = 90^\circ$, entonces, $\overline{BL}$ es altura del triángulo $\triangle ABC$.

.

La intersección de las rectas $\overline{CK}$ y $\overline{BL}$ es el ortocentro H del triángulo $\triangle ABC$.

Veamos que H pertenece a la recta PQ eje radical de las dos circunferencias:

El ortocentro del triángulo cumple que:

$$\overline{AH} \cdot \overline{HK} = \overline{BH} \cdot \overline{HL}.$$

Entonces, H tiene la misma potencia respecto de las dos circunferencias, entonces, H pertenece al eje radical de ambas circunferencias.

Entonces, H es el punto fijo.

