Pr. Cabri 877

Enunciado

Sea BCD un triángulo equilátero. Sea M el punto medio de BC. Tracemos AM =MD. Sean G, O, H el baricentro, circuncentro y ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de diámetros AH y MO son tangentes en G.
Suppa, E. (2018).

Solución de César Beade Franco

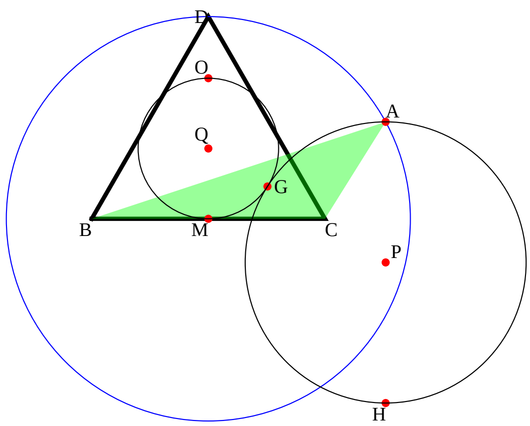
Tomemos como vértices del triángulo equilátero B($-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 0), C($\frac{1}{\sqrt{3}}$, 0) y D(0,1).

En estas condiciones, M(0,0) y A(Cos a,Sen a), al estar situado sobre una circunferencia de centro el origen y radio 1.
Calculamos G, O y H. Resulta que G($\frac{\text{Cos a}}{3}$, $\frac{\text{Sin a}}{3}$), O(0, $\frac{\text{Csc a}}{3}$) y H(Cos a, $-\frac{2\,\text{Csc a}}{3}+\text{Sin a}$).

La circunferencia de diámetro AH, tiene como centro P(Cos a, $-\frac{1}{6}(-1+3\,\text{Cos}\,2\,\text{a})\,\text{Csc a}$) y radio r=$\frac{\text{Csc a}}{3}$ y la de diámetro MO, Q(0, $\frac{\text{Csc a}}{6}$) y s=$\frac{\text{Csc a}}{6}$.

Comprobemos que P, G y Q están alineados y que PQ=r+s.
Para lo primero calculamos Det[GP,GQ]=
Det[(($-\frac{2\,\text{Cos a}}{3}$, $\frac{1}{3}\,\text{Cos}\,2\,\text{a}\,\text{Csc a}$),($\frac{\text{Cos a}}{3}$, $-\frac{1}{6}\,\text{Cos}\,2\,\text{a}\,\text{Csc a}$))]=0,
pues las filas son proporcionales.
También que PQ=| Q-P| $\frac{\text{Csc a}}{2}$=r+s, lo que nos asegura la tangencia.

Out[517]=



Observamos que la primera tiene radio doble que la segunda. Y también que OM y AH son paralelos.