Propuesto por Ercole Suppa

Problema 877

Sea BCD un triángulo equilátero.

Sea M el punto medio de BC. Tracemos AM =MD.

Sean G, O, H el baricentro, circuncentro y ortocentro del triángulo ABC.

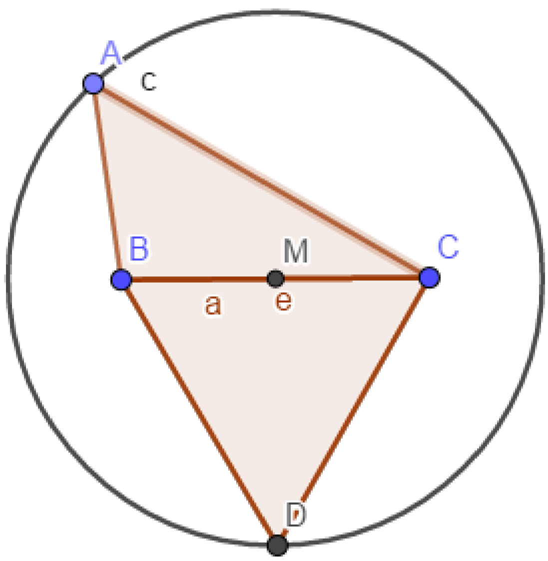
Demostrar que las circunferencias de diámetros AH y MO son tangentes en G.

Suppa, E. (2018) : Comunicación personal.

El autor señala que el problema lo ha enviado al foro Perú Geométrico.

Solución del director

Supongamos, sin pérdida de generalidad que AC>AB.



En el triángulo ABC, la mediana $AM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Por lo que $MI = \frac{\sqrt{3}}{6} a$

Si AC=m, debe ser

$AM^2 = \frac{1}{4}(2m^2 + 2AB^2 - a^2) \rightarrow AB = \sqrt{2a^2 - m^2}$

$$a^2 = m^2 + (2a^2 - m^2) - 2\, m\sqrt{2a^2 - m^2} \cos \alpha$$

Luego $\cos \alpha = \frac{a^2}{2\, m\sqrt{2a^2 - m^2}}$

Así $sen\ \alpha = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{8a^2m^2-4m^4-a^4}{2\ a^2-m^2}}$

De esta manera, $OM = \frac{a^3}{\sqrt{8\ a^2m^2-4m^4-a^4}}$.

Por otra parte estudiemos el coseno del ángulo $\angle AMB$.

En el triángulo ABM tenemos:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2\ AM\ MB\ cos\varphi$$

De donde:

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{3}\,(m^2-a^2)}{3a^2}$$

Y el $\cos(\angle IMO) = sen\ \varphi = \sqrt{\frac{8a^2m^2-4m^4-a^4}{3\ a^4}}$

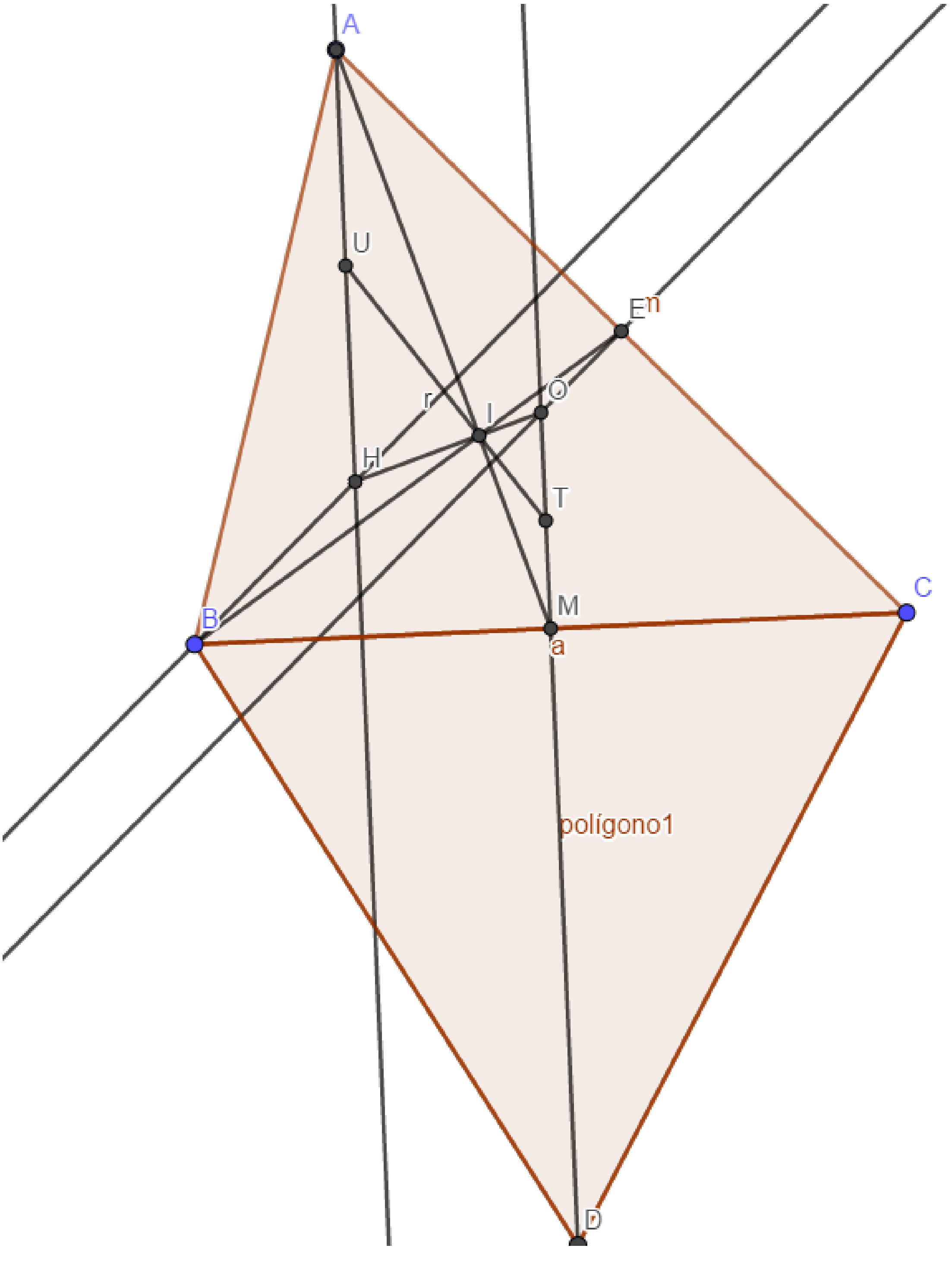
Así si T es el punto medio de OM, si consideramos el triángulo IMO tenemos:

$$TI^2 = MI^2 + MT^2 - 2\ MI\ MT$$

Es decir:

$$TI^2 = \frac{3}{36}a^2 + \frac{a^6}{4(8\ a^2m^2-4m^4-a^4)} - 2\ \frac{\sqrt{3}}{6}a\frac{a^3}{2\sqrt{8\ a^2m^2-4m^4-a^4}}\sqrt{\frac{8a^2m^2-4m^4-a^4}{3\ a^4}}$$

De donde se tiene que TI=MT, es decir, I es un punto de la circunferencia de diámetro OM.



Dado que HIO están alineados y que HI=2IO, si U es el centro de AH, los triángulos UHI y TOI son semejantes de razón 2, por lo que UI=UH, y el punto I es de la circunferencia de diámetro AH.

Siendo UT la suma de los radios de ambas circunferencias, I es el único punto común a las mismas, de donde se deduce la propiedad pedida.

Ricardo Barroso Campos . Jubilado. Sevilla. España.