

Suppa, E. (2018) : Comunicación personal.

Siendo $\triangle BCD$ equilátero tenemos $AM = MD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por otro lado, para el teorema de la mediana $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, entonces

Por lo tanto $\angle BAC < 90^\circ$ siendo

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{2bc} > 0$$

Mostramos ahora que los triángulos $\triangle AGH$ y $\triangle AKM$ son semejantes: de hecho, siendo $AH = 2R \cos A$, tenemos

$$\frac{AH}{AG} = \frac{2R \cos A}{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a} = \frac{6R \cos A}{\sqrt{3}a} = 6 \cdot \frac{abc}{4\Delta} \cdot \frac{a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4\Delta}$$

$$\frac{AM}{AK} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{a}{2\Delta}}{\frac{\sqrt{3}a^2}{4\Delta}}$$

entonces

$$\frac{AH}{AG} = \frac{AM}{AK} \quad \Rightarrow \quad \triangle AGH \sim \triangle AKM$$

Per lo tanto $\angle AGH = \angle OGM = \angle AKM = 90^\circ$ de lo cual sigue que el baricentro G pertenece a las circunferencias (E) y (F) de diámetros AH y OM respectivamente.

Finalmente observamos que, siendo $\triangle AGH \sim \triangle MGO$ tenemos

$$\frac{AH}{AG} = \frac{MO}{MG} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AE}{AG} = \frac{MF}{MG}$$

de donde se deduce que $\triangle AEG \sim \triangle MFG$.

Entonces $\angle AGE = \angle MGF$ y los puntos E, G, F están alineados.

Siendo E, G, F alineados y $G \in (E) \cap (F)$ los círculos (E) y (F) son tangentes en el punto G y así hemos terminado. $\square$