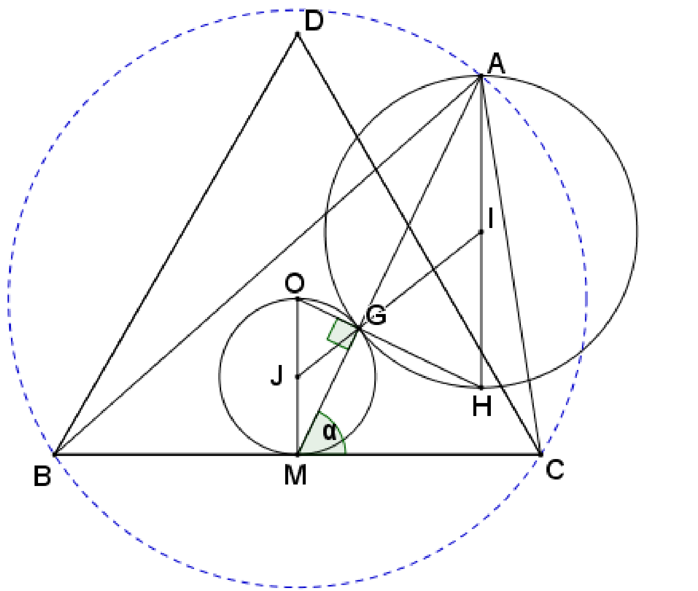
Problema n°877
Sea BCD un triángulo equilátero.Sea M el punto medio de BC. Tracemos AM =MD.Sean G, O, H el baricentro, circuncentro y ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de diámetros AH y MO son tangentes en G.
Suppa, E. (2018) : Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



MC = MB = 1; MA = √3 ; MG = 1/√3; MO = 1/√3sin(α)

Soit $\angle AMC = \alpha$ et sans perte de généralité on pose MB = MC = 1.
On en déduit MA = MD = CD.$\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.
En prenant les droites BC et MD comme axes des abscisses et des ordonnées,les coordonnées des points C,A et G,centre de gravité du triangle ABC, sont respectivement (1,0), ($\sqrt{3}\cos(\alpha)$, $\sqrt{3}\sin(\alpha)$) et ($\cos(\alpha)/\sqrt{3}$, $\sin(\alpha)/\sqrt{3}$).
Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est tel que $OA^2 = OC^2$. On en déduit les coordonnées de O: ($0, 1/\sqrt{3}\sin(\alpha)$). D'où $MO^2 = 1/3\sin^2(\alpha)$.
Par ailleurs $MG^2 + GO^2 = 1/3 + \cos^2(\alpha)/3 + (\sin(\alpha)/\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}\sin(\alpha))^2 = [1 + \cos^2(\alpha) + \cos^4(\alpha)/\sin^2(\alpha)]/3$
soit $MG^2 + GO^2 = [\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\ (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))]/3\sin^2(\alpha) = 1/3\sin^2(\alpha) = MO^2$.
Le triangle OGM est donc rectangle en G.
Comme les points O,G,H sont alignés avec GH = 2GO, les deux triangles MGO et AGH sont homothétiques l'un de l'autre dans le rapport d'homothétie 1/2. Le triangle AGH est donc rectangle en G.
Les cercles de diamètre AH et OM ont pour centres I et J tels que I,G,J sont alignés avec GI = rayon du cercle de diamètre AH et GJ = rayon du cercle de diamètre OM. Les deux cercles de diamètres AH et OM sont tangents en G.