

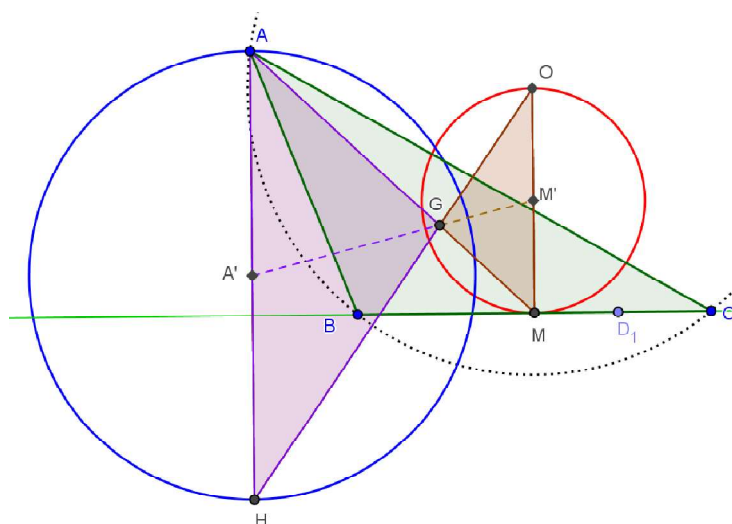
Quincena del 1 al 15 de Mayo de 2018.

Propuesto por Ercole Suppa

Problema 877.- Sea BCD un triángulo equilátero. Sea M el punto medio de BC . Tracemos $AM = MD$. Sean G, O, H el baricentro, circuncentro y ortocentro del triángulo ABC . Demostrar que las circunferencias de diámetros AH y MO son tangentes en G .

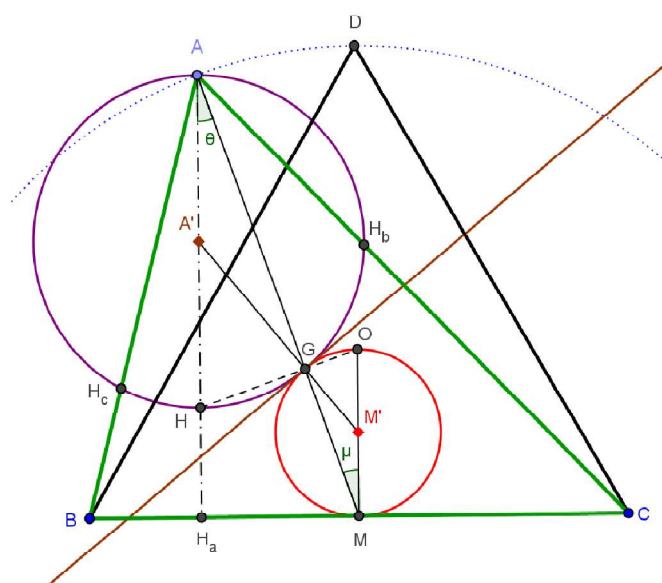
Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



En un triángulo ABC cualquiera, con los datos del problema y siendo R el radio de la circunferencia circunscrita se tienen $AH = 2R \cdot |\cos A|$, y $OM = R \cdot |\cos A|$, además $2GM = AG$ y $\angle M'MG = \angle A'AG$, por tanto los triángulos $AA'G$ y $MM'G$ son semejantes. De esto se deduce que $2GM' = A'G$ y que los puntos A', G y M' están alineados. Con un razonamiento idéntico también son semejantes los triángulos AHG y MOG .

Una homotecia de centro G y razón -2 transforma la circunferencia de diámetro OM en la de diámetro AH .



La condición $AM = MD$, significa que la mediana de A mide igual que la altura del triángulo equilátero de lado $a = BC$. Esto es,

$$AM^2 = \frac{3}{4}a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow 2a^2 = b^2 + c^2.$$

Como los puntos A' , M' y G están alineados bastará demostrar que G está en ambas circunferencias para concluir que son tangentes en él. Para ello demostraremos que el triángulo OGM es rectángulo en G (y con ello también ΔHGA).

Es conocida, para un triángulo cualquiera, el valor de la potencia de G respecto de la circunferencia circunscrita Γ . Se tiene $|\text{Pot}(G, \Gamma)| = R^2 - OG^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Aplicado a este triángulo resulta

$$R^2 - OG^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{a^2}{3} \Rightarrow OG^2 = R^2 - \frac{a^2}{3}; GM^2 = \frac{1}{9}AM^2 = \frac{a^2}{12},$$

$OG^2 + GM^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$, y poniendo a en función del radio R de la circunscrita ($a = 2R\text{sen}A$) se tiene $OG^2 + GM^2 = R^2(1 - \text{sen}^2 A) = R^2 \cdot \cos^2 A = OM^2$. Y con esto concluimos. ■