Problema 878.-

En un triángulo ABC, tenemos: ∠BAC=60º, M el punto medio de BC.
Sean O , H, N circuncentro, ortocentro y centro de los nueve puntos de ABC.
Demostrar que:
1.-La circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N.
2.- AH=2MO.

Ercole Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea realizada la construcción según el enunciado dado. Podemos observar los siguientes hechos de interés:

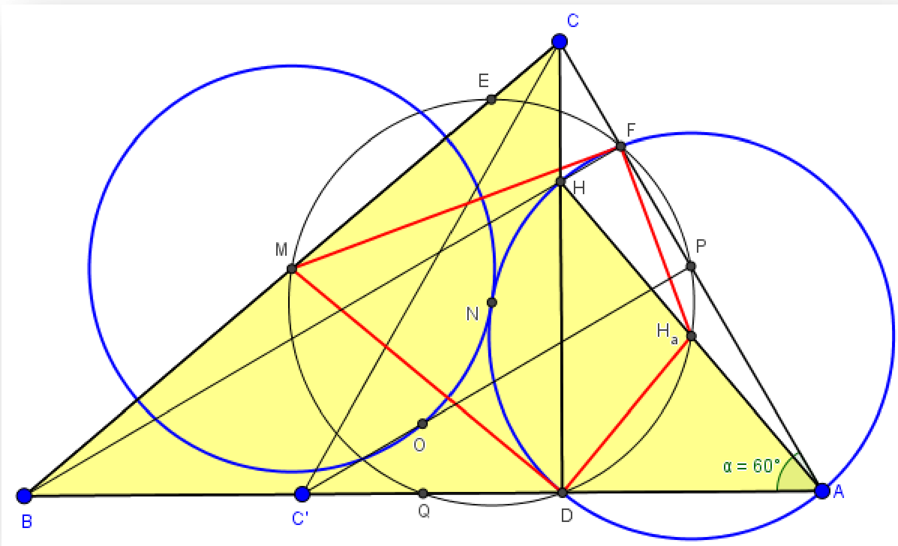
H1.- En la circunferencia de los nueve puntos se encuentra situado el cuadrilátero MFH_aD.

Vemos que $MF = MD$, pues la circunferencia que circunscribe a los puntos $BDFC$ tiene como centro el punto M y como radio

$MC = MB = \boldsymbol{MD = MF}$.

Por otro lado, la circunferencia que circunscribe a los puntos $ADHF$ tiene como centro el punto H_a y como radio

$H_aH = H_aA = \boldsymbol{H_aD = H_aF}$.



Por tanto, los ángulos iguales de dicho cuadrilátero MFH_aD en F y D han de ser iguales a 90°.
De este modo, los puntos M y H_a son diametralmente opuestos en la circunferencia de centro N de los nueve puntos.
Además como el ángulo central $\measuredangle FH_aD = 120° \rightarrow \measuredangle FMD = 60°$.

H2.- Vamos a calcular ahora las longitudes de los radios de las dos circunferencias implicadas:

C_1: $(\boldsymbol{Centro = H_a; Radio = r_1 = H_aH})$

De la semejanza entre los triángulos $\Delta ADB \sim \Delta HDA \rightarrow \frac{BC}{HA} = \frac{CD}{AD} = \tan 60° \rightarrow \frac{a}{2r_1} = \sqrt{3} \rightarrow r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,a}{6}$.

C_2: $(\boldsymbol{Centro = M; Radio = r_2 = MO})$

Del triángulo rectángulo OMC, tenemos que $OM^2 + MC^2 = OC^2 \rightarrow OM^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Ahora bien, como $\frac{a}{\sin 60°} = 2R \rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Por tanto, $OM^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} \rightarrow OM = r_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,a}{6} = r_1$

H3.- Así, el punto N pertenecerá a la circunferencia de centro M y radio OM, es decir $MO = MN = r_2 = r_1$.

H4.- En el triángulo MFH_a de ángulos $\{30°, 60°, 90°\}$ deducimos que:

$AH = 2r_1 = 2HH_a = 2H_aF = MH_a = MN + NH_a = MO + NH_a = r_1 + NH_a \rightarrow NH_a = r_1$.

En definitiva, probamos por una parte que $AH = 2r_1 = 2MO$. *cqd* ■

Y por otra parte, como N pertenece a la circunferencia de centro H_a y radio r_1 y también a la circunferencia de centro M y radio $r_2 = r_1$, entonces la circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N, al ser N punto medio del segmento MH_a. *cqd* ■