Propuesto por Ercole Suppa:

Problema 878

En un triángulo ABC, tenemos:  $\angle BAC = 60^{\circ}$ , M el punto medio de BC. O , H, N circuncentro, ortocentro y centro de los nueve puntos de ABC.

Demostrar que

1.-La circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N.

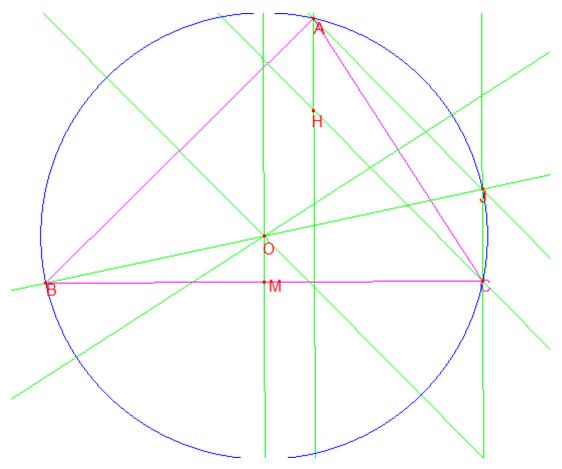
2.- AH=2MO.

Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

Solución del director.

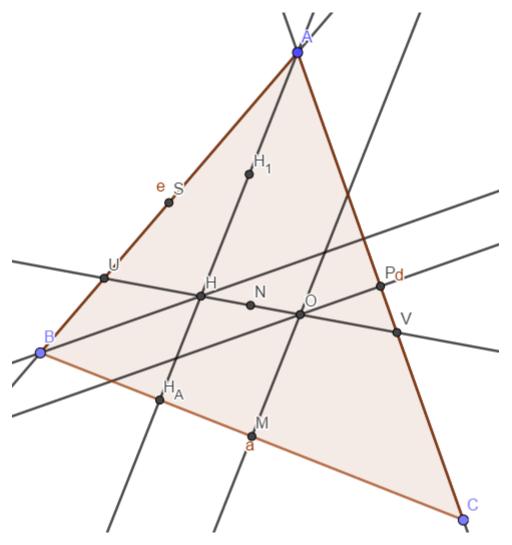
Comencemos por 2.- Es una propiedad general a cualquier triángulo.

Sea ABC un triángulo cualquiera.



Si trazamos el diámetro BJ, es JC=2OM=AH, por semejanza y paralelismo.

1.- La circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N.



Si  $\angle BAC = 60^{\circ}$ , y sin pérdida de generalidad, sea  $\angle ABC = 60^{\circ} + \alpha$ ,  $\angle ACB = 60^{\circ} - \alpha$ 

Es 
$$\angle BOC = 120^{\circ}, \angle OBC = 30^{\circ} \angle OCB = 30^{\circ}$$

Es 
$$\angle HBC = 30^{\circ} + \alpha$$
,  $\angle HCB = 30^{\circ} - \alpha$ , por lo que  $\angle BHC = 120^{\circ}$ 

De donde se deduce que BHOC es cíclico, con  $\angle HOB = \angle HCB = 30^{\circ} - \alpha$ ,

Y también, es  $\angle OHC = \angle OBC = 30^{\circ}$ 

Si trazamos la recta de Euler, es conocido que N es el punto medio de HO, pues el centro de la circunferencia de los nueve puntos es el centro de la hipotenusa de  $H_1H_AM$  que  $\ es\ N$ .

Sean Los puntos U y V de corte de la recta de Euler con AB y AC.

$$\angle UHB = 180^{\circ} - \angle BHC - \angle OHC = 30^{\circ}$$
, así  $\angle AUH = 60^{\circ}$ ,  $\angle VOC = 180^{\circ} - \angle BOC - \angle BOH = 180^{\circ} - 120^{\circ} - (30^{\circ} - \alpha) = 30^{\circ} + \alpha$ 

y el triángulo AUV es equilátero.

Por otra parte,  $\angle MOH = 180^{\circ} - \angle MOC - \angle COV = 180^{\circ} - 60^{\circ} - (30^{\circ} + \alpha) = 90^{\circ} - \alpha$ Por lo que  $\angle OHA = 90^{\circ} - \alpha$ .

Por otra parte,  $\angle HAO = 60^{\circ} - \angle BHA - \angle COA = 2\alpha$ .

Así el triángulo AHO es isósceles, y los triángulos HH₁N y MON también lo son.

Con este resultado resolvemos lo pedido.

