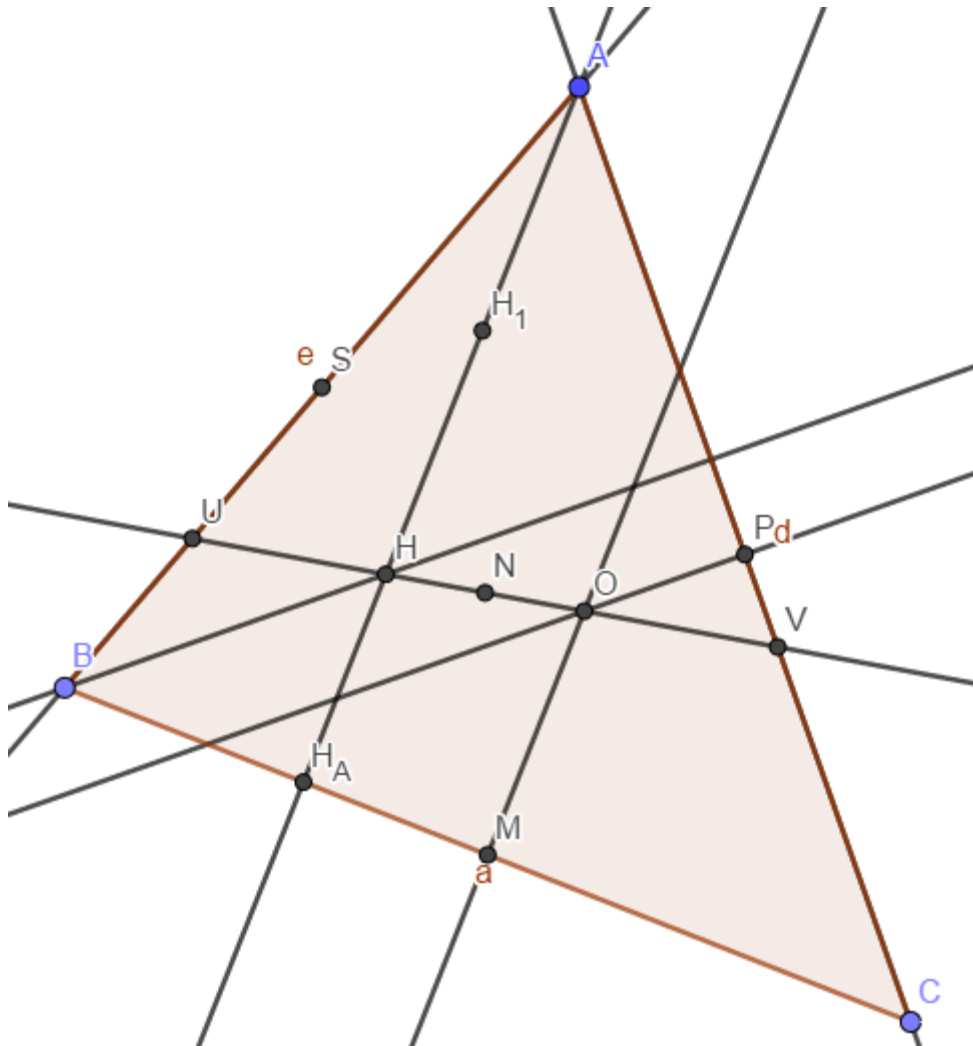


1.- La circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N.



Si $\angle BAC = 60^\circ$, y sin pérdida de generalidad, sea $\angle ABC = 60^\circ + \alpha$, $\angle ACB = 60^\circ - \alpha$

Es $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle OBC = 30^\circ$, $\angle OCB = 30^\circ$

Es $\angle HBC = 30^\circ + \alpha$, $\angle HCB = 30^\circ - \alpha$, por lo que $\angle BHC = 120^\circ$

De donde se deduce que BHOC es cíclico, con $\angle HOB = \angle HCB = 30^\circ - \alpha$,

Y también, es $\angle OHC = \angle OBC = 30^\circ$

Si trazamos la recta de Euler, es conocido que N es el punto medio de HO, pues el centro de la circunferencia de los nueve puntos es el centro de la hipotenusa de $H_1H_AH_C$ que es N.

Sean Los puntos U y V de corte de la recta de Euler con AB y AC.

$\angle UHB = 180^\circ - \angle BHC - \angle OHC = 30^\circ$, así $\angle AUH = 60^\circ$,

$$\angle VOC = 180^\circ - \angle BOC - \angle BOH = 180^\circ - 120^\circ - (30^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$$

y el triángulo AUV es equilátero.

Por otra parte, $\angle MOH = 180^\circ - \angle MOC - \angle COV = 180^\circ - 60^\circ - (30^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$

Por lo que $\angle OHA = 90^\circ - \alpha$.

Por otra parte, $\angle HAO = 60^\circ - \angle BHA - \angle COA = 2\alpha$.

Así el triángulo AHO es isósceles, y los triángulos HH_1N y MON también lo son.

Con este resultado resolvemos lo pedido.

