

Problema 878

En el triangle $\triangle ABC$, tenim $\angle BAC = 60^\circ$, M el punt mig de $\overline{BC}$, O, H, N circumcentre, ortocentre i centre de la circumferència dels nou punts de $\triangle ABC$.

Demostreu que

1.- La circumferència de centre M i radi $\overline{MO}$ i la circumferència de diàmetre $\overline{AH}$ són tangents en N.

2.- $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{MO}$.

Solució:

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

$$\angle BOC = 2A = 120^\circ.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{MO} = \frac{1}{2} \overline{OB} = \frac{1}{2} R.$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{AH}$

El centre de la circumferència dels nou punts passa per N i és el punt mig de $\overline{OH}$.

El radi de la circumferència dels nou punts és $\frac{1}{2} R$.

$$\overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} b.$$

$$\angle AHD = B.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ADH$:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin B} = \overline{AH}$$

$$\frac{1}{2} \frac{b}{\sin B} = \overline{AH}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{1}{2} 2R = \overline{AH}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AH} = 2 \cdot \overline{MO}.$$

La recta OM talla el costat $\overline{AB}$ en el punt E.

$$\angle HAN = 90^\circ - B, \angle MEB = 90^\circ - B.$$

Aleshores els segments $\overline{PH}$ i $\overline{MO}$ són paral·lels i iguals.

Aleshores, POMH és un paral·lelogram.

N és el punt mig de $\overline{OH}$.

Aleshores, N és el punt mig de $\overline{PM}$.

Aleshores, $\overline{PN} = \frac{1}{2} R$, N pertany a la circumferència de diàmetre $\overline{AH}$.

N és el punt de tangència de les dues circumferències.

