Problema 878

En un triángulo ABC, tenemos: ∠BAC=60°, M el punto medio de BC. O , H, N circuncentro, ortocentro y centro de los nueve puntos de ABC.

Demostrar que

1.-La circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N.

2.- AH=2MO.

Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{\mathsf{ABC}}$.

$$\angle BOC = 2A = 120^{\circ}$$
.

Entonces,
$$\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}R$$
.

Sea P el punto medio del segmento AH

El centro de la circunferencia de los nueve puntos pasa por N y es el punto medio de \overline{OH} .

El radio de la circunferencia de los nueve puntos es $\frac{1}{2}$ R.

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}b.$$

$$\angle AHD = B$$
.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo ADH:

$$\frac{\mathsf{AD}}{\mathsf{sinB}} = \overline{\mathsf{AH}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{b}{\sin B} = \overline{AH}$$
.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo ABC:

$$\frac{1}{2}$$
2R = \overline{AH} .

Entonces, $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{MO}$.

La recta OM corta el lado \overline{AB} en el punto E.

$$\angle$$
HAN = 90°-B, \angle MEB = 90°-B.

Entonces los segmentos \overline{PH} y \overline{MO} son paralelos e iguales.

Entonces, POMH es un paralelogramo.

N es el punto medio de OH.

Entonces, N es el punto medio de \overline{PM} .

Entonces, $\overline{PN} = \frac{1}{2}R$, N pertenece a la circunferencia de diámetro \overline{AH} .

N es el punto de tangencia de las dos circunferencias.

