

Problema 878

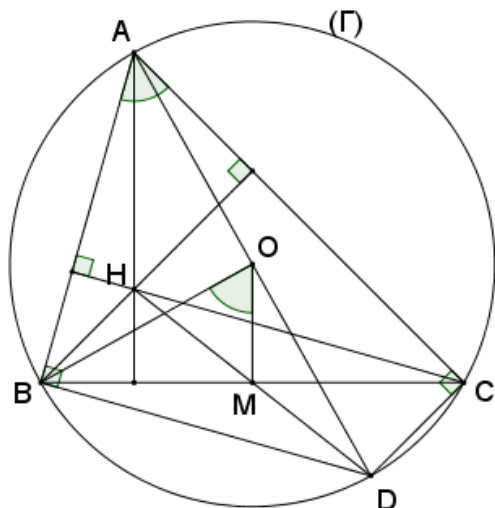
En un triángulo ABC, tenemos: $\angle BAC = 60^\circ$, M el punto medio de BC. O, H, N circuncentro, ortocentro y centro de los nueve puntos de ABC.

Demostrar que

- 1.- La circunferencia de centro M y radio MO, y la circunferencia de diámetro AH son tangentes en N.
- 2.- $AH = 2MO$.

Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

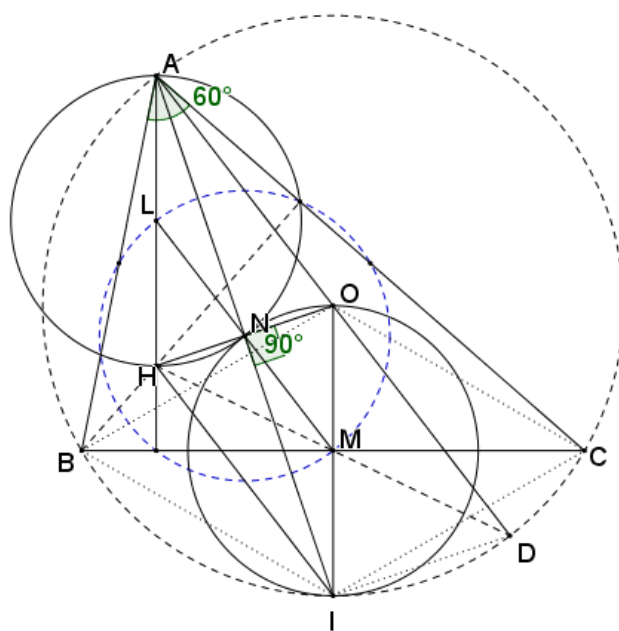
Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Nous commençons par démontrer la propriété n°2: $AH = 2MO$ qui est vraie dans n'importe quel triangle ABC.

Lemme: dans un triangle ABC qui admet respectivement les points M, O et H comme milieu du côté BC, centre du cercle circonscrit (Γ) et orthocentre, on a la relation **$AH = 2MO$** .

Démonstration: soit D le point diamétralement opposé à A sur (Γ). Comme l'angle $\angle ABD$ est droit et que CH est la hauteur issue de C dans le triangle ABC, les droites BD et CH sont parallèles entre elles. Il en est de même des droites CD et BH. Le quadrilatère BDCH est donc un parallélogramme dont les diagonales BC et DH se coupent en M milieu de BC. Il en résulte que M est milieu de DH. Les droites AH et OM sont perpendiculaires à BC. D'où $AH = 2MO$.



On retient les même notations que précédemment auxquelles on ajoute le point I milieu de l'arc BC du cercle (Γ) qui ne contient pas A.

Comme l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, on a les relations d'angles:

$$\angle BOC = 120^\circ = \angle BIC = 180^\circ - \angle BAC$$

$$\angle OBI = \angle OBC + \angle CBI = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ = \angle OCI$$

Le quadrilatère BOCI est un losange dont les diagonales BC et OI sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu M.

Dans le triangle rectangle AID, on a $OI = AD/2 = AO$.

Comme $OI = 2MO$, d'après le lemme, on a $OI = AH = AO$.

Le quadrilatère AOIH est un losange dont les diagonales AI et OH se coupent en leur milieu N qui est le centre du cercle d'Euler du triangle ABC.

Les triangles rectangles AHN et OIN sont isométriques. Soit L le milieu de AH. Les points L, N et M étant alignés sur une droite parallèle à AO, le point N est le milieu de LM et le cercle de centre M et de rayon $MN = MO = r$ est tangent au cercle de centre L et de rayon $LN = LH = r$. Cqfd.