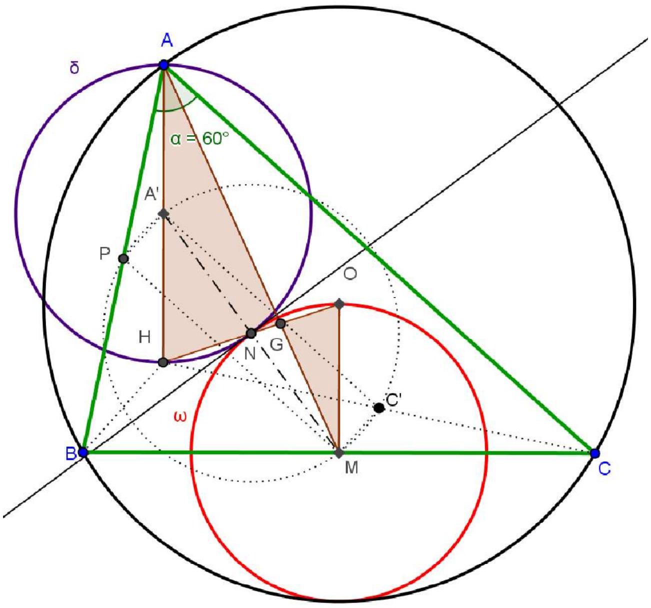
Quincena del 16 al 31 de Mayo de 2018.

Propuesto por Ercole Suppa

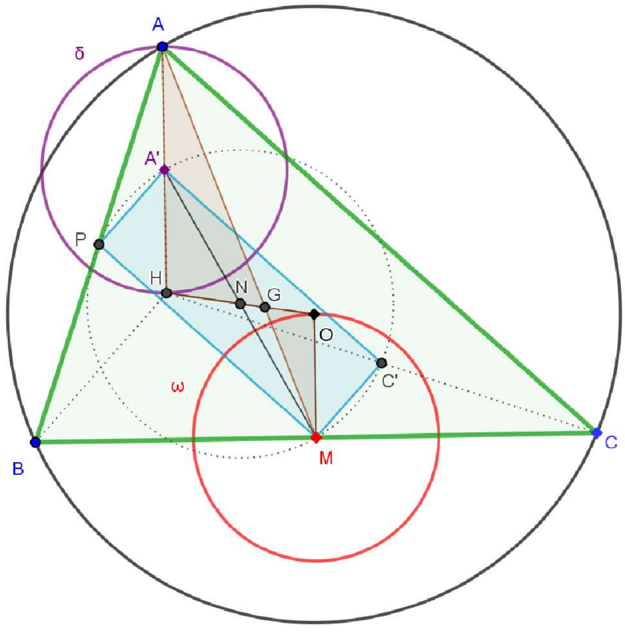


***Problema* 878**.- *En un triángulo ABC, tenemos:* $\angle BAC = 60º$, M *el punto medio de* BC. O, H, N*circuncentro, ortocentro y centro de los nueve puntos de ABC. Demostrar que* 1.-*La circunferencia de centro* M *y radio* MO, *y la circunferencia de diámetro* AH *son tangentes en N.* 2.- $AH = 2MO$.

Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

2.- Los triángulos GOM y GHA tienen igual el ángulo en G; el ángulo en M es igual al ángulo en A y por tanto tienen sus tres ángulos iguales. Son semejantes. Por la posición de G sobre la recta de Euler su distancia a H es el doble de su distancia a O y por su posición en la mediana AM su distancia a A es también el doble de su distancia a M. Así pues, de todo esto, resulta que $AH = 2MO$. La longitud de MO se puede calcular considerando el triángulo rectángulo OMC de donde resulta $MO = R \cdot \cos\alpha$.



1.- La circunferencia de los nueve puntos, de centro N (el punto medio de OH), pasa por los puntos medios de los lados BC y AB (M y P respectivamente) y también por los puntos medios de los segmentos AH y CH (A' y C' respectivamente).

Por el teorema de Varignon el cuadrilátero formado por estos puntos, es decir, el $A'PMC'$ es un paralelogramo y como MC' es paralelo a BH (es la paralela media del triángulo BHC) y

$A'C'$ lo es a AC (paralela media de AHC) resulta que este paralelogramo es un rectángulo, siendo N el punto medio de cualquiera de sus diagonales, $A'M$ o $C'P$.
Llamemos δ y ω a las circunferencias de radios AA' y MO, respectivamente. Según hemos visto $2MO = AH$, que quiere decir que tienen radios iguales. Al ser N el punto medio del segmento definido por sus centros, está en el eje radical de ambas. Cuando el ángulo en A es $\alpha = 60°$, el valor de MO es $MO = \frac{R}{2}$. La conclusión es inmediata:
Las tres circunferencias del problema tienen el mismo radio y N pertenece a δ y a ω. Así pues las circunferencias δ y ω son tangentes en N como pretendíamos demostrar.■