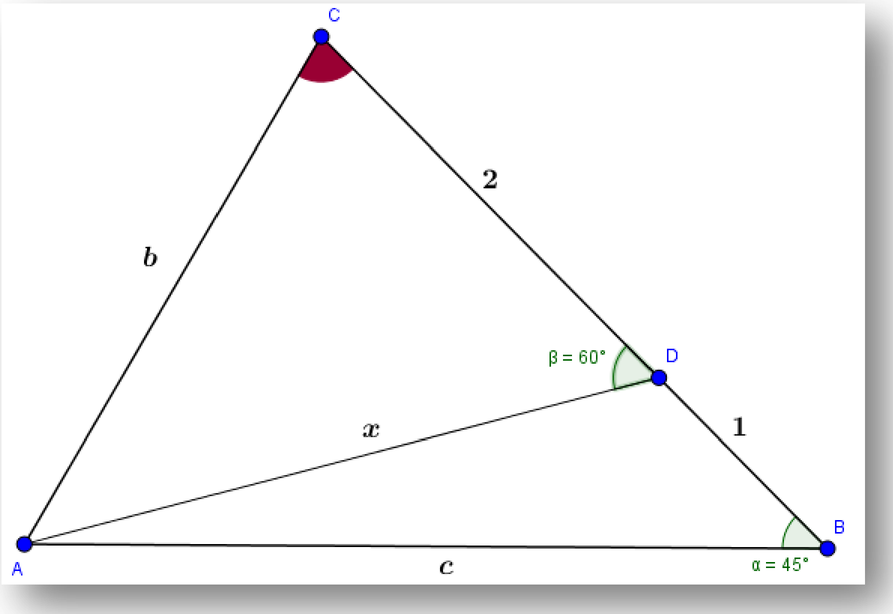
Problema 879.-
7ª Jornada. Problema 18.
En el triángulo ABC, como indica la figura,

El punto D divide el lado BC en dos partes de longitudes BD=1, DC=2, y se conocen los ángulos ∠ABC=45º, ∠ADC=60º. Determina la medida del ángulo ∠ACB.

Ledesma, A. (2005): Áreas de juegos y juegos de áreas. XVII Open Matemático. Deportes y Matemáticas.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Hallamos en primer lugar el valor de los segmentos c y x, respetivamente.

$\frac{x}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 120°} \rightarrow \frac{c}{x} = \frac{\sin 120°}{\sin 45°} \rightarrow \frac{c}{x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (I).

$c^2 = x^2 + 1 - 2x\, cos\, 120° \rightarrow c^2 = x^2 + 1 + x$ (II).

Con ambas expresiones (I) y (II), obtenemos la ecuación $x^2 + 1 + x = \frac{3x^2}{2} \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 + \sqrt{3}$

Por tanto, $x = (1 + \sqrt{3})$ y $c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}) = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

En el triángulo ACD, tenemos que $b^2 = x^2 + 4 - 4x\, cos\, 60° \rightarrow b^2 = x^2 + 4 - 2x = (1 + \sqrt{3})^2 + 4 - 2(1 + \sqrt{3})$.
En definitiva, $b^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 4 - 2 - 2\sqrt{3} = 6 \rightarrow b = \sqrt{6}$.
De este modo, en el triángulo ABC, vamos a deducir únicamente el valor del ángulo agudo A, al ser $b < a < c$.

$\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin 45°}{\sqrt{6}} \rightarrow \sin A = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = 60° \rightarrow \measuredangle ACD = 75°$.

Por tanto, la medida del ángulo $\angle ACB = 75°$.