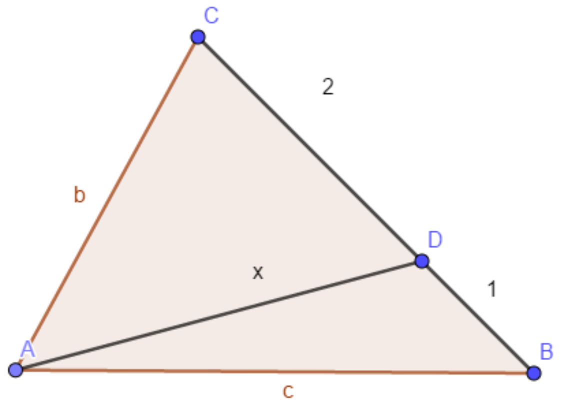
Problema 879

7ª Jornada

Problema 18. En el triángulo ABC, como indica la figura,



el puno D divide el lado BC en dos partes de longitudes BD=1, DC=2, y se conocen los ángulos

$$\angle ABC = 45º, \angle ADC = 60º.$$

Determina la medida del ángulo $\angle ACB$.

Ledesma, A. (2005): Áreas de juegos y juegos de áreas. XVII Open Matemático. Deportes y Matemáticas.

Solución del director.

En el triángulo ADB, 15º 120º, 45º, por el teorema del coseno tenemos:

$c^2=x^2 + 1^2 - 2\ 1\ x \cos(120º)$

$c^2=x^2 + 1 + x$

Por el teorema del seno tenemos:

$$\frac{c}{sen\,(120º)} = \frac{x}{sen\,(45º)} \to c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$$

Así, tenemos que $\frac{3}{2}x^2 = x^2 + 1 + x, por\ lo\ que\ x = 1 \mp \sqrt{3}$

Es decir, $x = 1 + \sqrt{3}, c = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}}$

En el triángulo ACB tenemos por la ley del coseno:

$$b^2 = 3^2 + (\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}})^2 - 2\,3(\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}})\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b^2 = 9 + \frac{3+9+6\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} - 9 = 6 \rightarrow b = \sqrt{6}$$

De nuevo por la ley del coseno aplicada a $\angle BAC$, tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\angle BAC$$

Es decir,

$$3^2 = \sqrt{6}^2 + (\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}})^2 - 2\sqrt{6}\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}}\cos\angle BAC$$

$$9 = 6 + \frac{3+9+6\sqrt{3}}{2} - \left(6+6\sqrt{3}\right)\cos\angle BAC$$

Es decir, $\cos\angle BAC = \frac{3+3\sqrt{3}}{6+6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Es decir, $\angle BAC = 60º, y\ por\ último, \angle ACB = 180º - 60º - 45º = 75º$

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla . España.