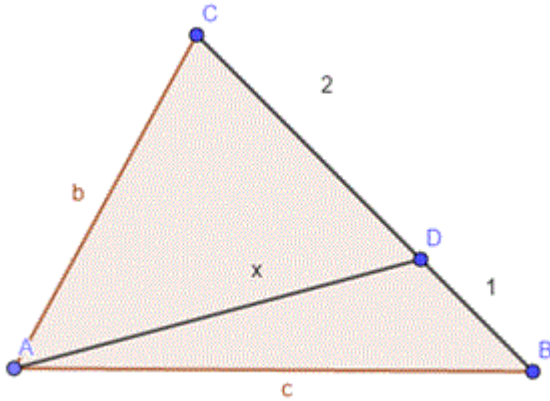


### Problema 879

7ª Jornada

Problema 18. En el triángulo ABC, como indica la figura,



el punto D divide el lado BC en dos partes de longitudes BD=1, DC=2, y se conocen los ángulos  $\angle ABC=45^\circ$ ,  $\angle ADC=60^\circ$

Determina la medida del ángulo  $\angle ACB$ .

Ledesma, A. (2005): Áreas de juegos y juegos de áreas. XVII Open Matemático. Deportes y Matemáticas.

**Solution proposée par Philippe Fondanaiche**

**Réponse:**  $\angle ACB = 75^\circ$

Nous allons démontrer que les triangles ABC et DAC sont semblables en mesurant les dimensions de leurs côtés.

La loi des sinus dans le triangle BAD donne les relations:

$$AB/\sin(\angle ADB) = AB/\sin(120^\circ) = AD/\sin(45^\circ) = BD/\sin(\angle BAD) = BD/\sin(15^\circ).$$

$$\text{On sait que } \sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{On en déduit } AB = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} \text{ et } AD = 1 + \sqrt{3}.$$

Par ailleurs dans le triangle CDA, la loi des cosinus donne la relation :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos(60^\circ) = (1 + \sqrt{3})^2 + 4 - 2(1 + \sqrt{3}) = 6. \text{ D'où } AC = \sqrt{6}.$$

On obtient ainsi le tableau des 6 longueurs des côtés des triangles ABC et DAC.

$$AB = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} \quad BC = 3 \quad AC = \sqrt{6}$$

$$AD = 1 + \sqrt{3} \quad AC = \sqrt{6} \quad CD = 2$$

La similitude des deux triangles ABC et DAC est obtenue par les deux relations :

$$AB \cdot AC = \frac{6}{\sqrt{3}-1} = 3(1 + \sqrt{3}) = AB \cdot BC \text{ et } BC \cdot CD \cdot 3 = 6 = AC^2 = (\sqrt{6})^2.$$

On a alors  $\angle CAD = \angle ABC = 45^\circ$ . D'où  $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ . Cqfd.