

Propuesto por Ercole Suppa:

Problema 880.

Sean $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. $a=(b+c)/3$.

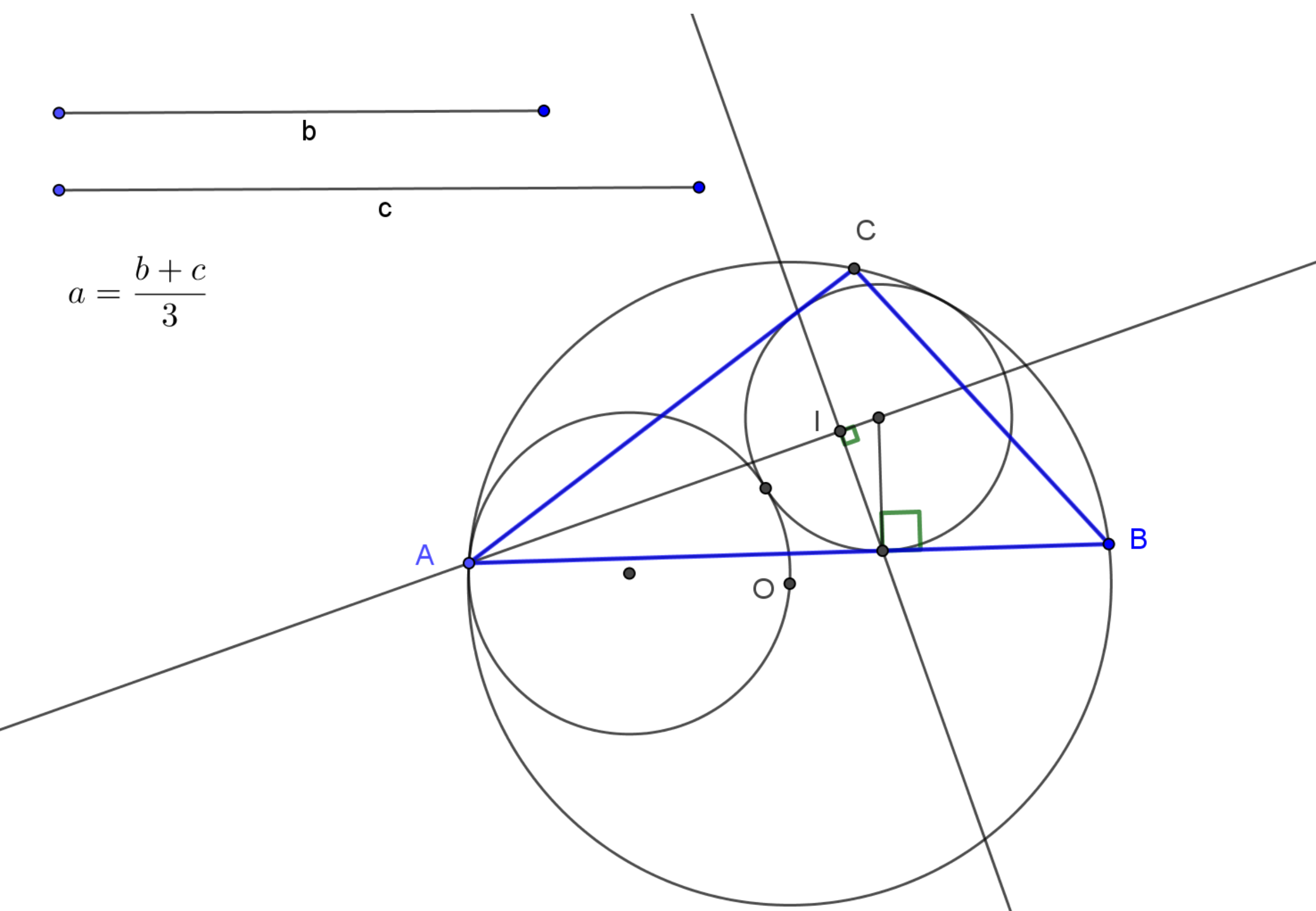
O el circuncentro de ABC. I el incentro de ABC.

(O) la circunferencia circunscrita a ABC

(M) circunferencia de diámetro AO.

(N) el incírculo mixtilinear de A (círculo tangente a AB, AC y a (O)).

Probar que (M) es tangente a (O) y a (N).



En coordenadas baricéntricas, la ecuación de la circunferencia de diámetro AO es:

$$(M) : c^2 x y + b^2 x z + a^2 y z + (x+y+z) \left(-\frac{c^2 y}{2} - \frac{b^2 z}{2} \right) = 0.$$

Y la del incírculo mixtilinear de A (sus puntos de tangencia con AB y AC están en la perpendicular por el incentro a la bisectriz en A) es:

$$(N) : c^2 x y + b^2 x z + a^2 y z + (x+y+z) \left(-\frac{(4 b^2 c^2 x)}{(a+b+c)^2} + \frac{(-c^2 + (4 b c^2 (a+c))}{(a+b+c)^2} y + \frac{(-b^2 + (4 b^2 (a+b) c))}{(a+b+c)^2} z \right) = 0.$$

El eje radical de estas dos circunferencias es:

$$8 b^2 c^2 x + (a^2 c^2 - 6 a b c^2 + b^2 c^2 + 2 a c^3 - 6 b c^3 + c^4) y + (a^2 b^2 + 2 a b^3 + b^4 - 6 a b^2 c - 6 b^3 c + b^2 c^2) z = 0.$$

Esta recta es tangente a ambas circunferencias si su polo, respecto a una cualquiera de ellas, está sobre ellas (es decir, ambas son tangentes en este punto).

El polo del el eje radical respecto a la circunferencia (M) es:

$$(-7 a^4 - 2 a^3 (b+c) + 2 a (b-c)^2 (b+c) - 2 (b^2 - c^2)^2 + a^2 (9 b^2 - 6 b c + 9 c^2) : -2 b^2 (-2 a^2 + b^2 - c^2 + a (-b+c)) : 2 c^2 (2 a^2 + b^2 - c^2 + a (-b+c))),$$

el cual está sobre (M) si y solo si

$$4 a^2 b^2 (3 a - b - c) (a + b - c) c^2 (a - b + c) (a + b + c) = 0 \Leftrightarrow a = (b+c)/3.$$