

Propuesto por Ercole Suppa:

Problema 880.

Sean $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. $a=(b+c)/3$.

O el circuncentro de ABC. I el incentro de ABC.

(O) la circunferencia circunscrita a ABC

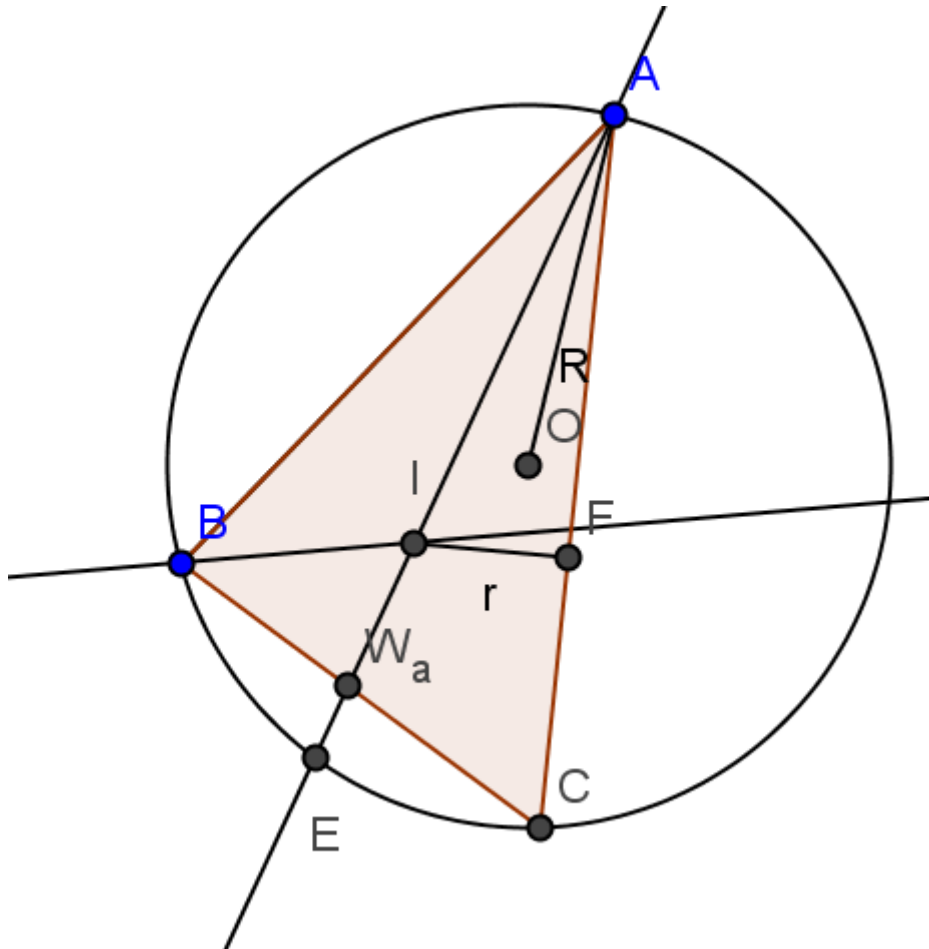
(M) circunferencia de diámetro AO.

(N) el incírculo mixtilinear de A (círculo tangente a AB, AC y a (O)).

Probar que (M) es tangente a (O) y a (N).

Suppa, E. (2018): Comunicación personal.

Solución parcial del director.



El triángulo propuesto tiene las siguientes características:

1.- Si AW_a es la bisectriz, es

$$BW_a = \frac{\frac{b+c}{3}c}{b+c} = \frac{c}{3}, CW_a = \frac{\frac{b+c}{3}b}{b+c} = \frac{b}{3}$$

Así, por el teorema de la bisectriz, es:

$$AW_a = \sqrt{bc\left(1 - \frac{\left(\frac{b+c}{3}\right)^2}{(b+c)^2}\right)} = \frac{2\sqrt{2bc}}{3}$$

Por potencia de W_a tenemos que :

$$(AW_a)(W_a E) = (W_a C)(W_a B)$$

$$W_a E = \frac{\frac{b}{3} \frac{c}{3}}{\frac{2\sqrt{2bc}}{3}} = \frac{\sqrt{2bc}}{12}, AE = \frac{3\sqrt{2bc}}{4}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{2b+2c}{3}\right)\left(\frac{2b-c}{3}\right)\left(\frac{2c-b}{3}\right)\left(\frac{b+c}{3}\right)}$$

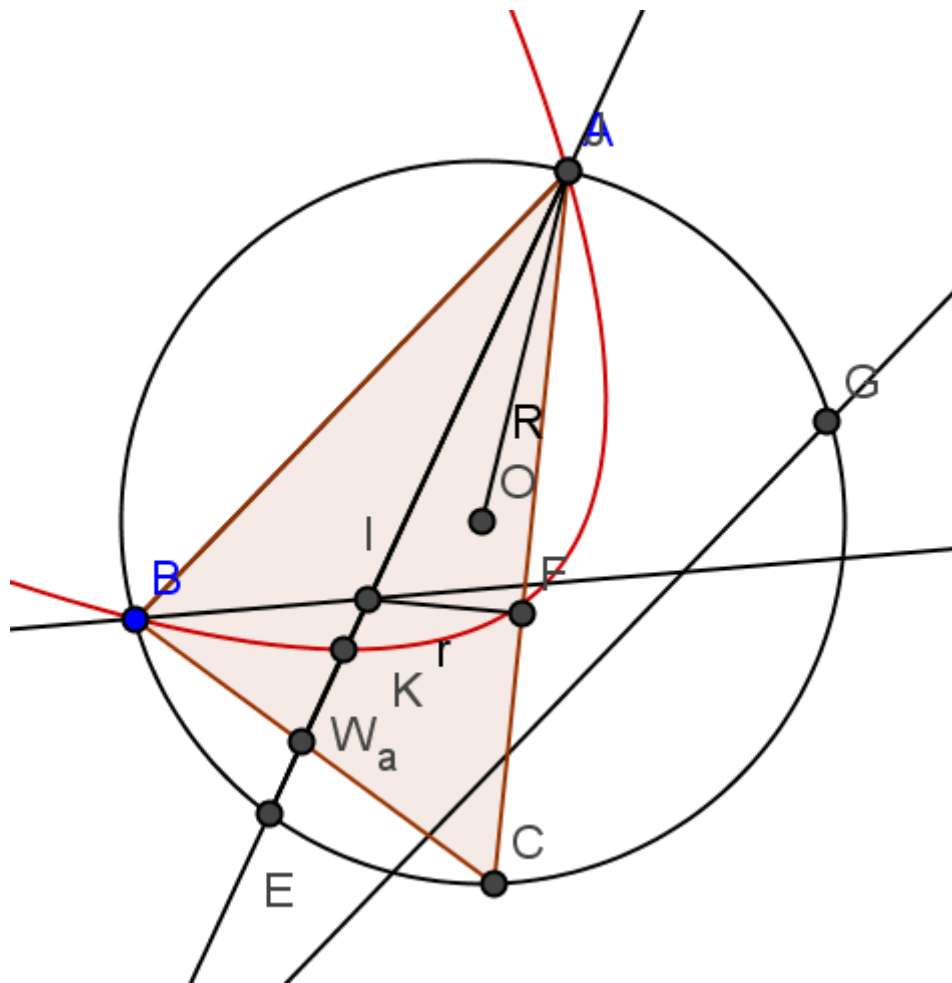
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\frac{b+c}{3} bc}{4\sqrt{\left(\frac{2b+2c}{3}\right)\left(\frac{2b-c}{3}\right)\left(\frac{2c-b}{3}\right)\left(\frac{b+c}{3}\right)}} = \frac{3bc}{4\sqrt{2(2b-c)(2c-b)}}$$

$$r = \frac{S}{2p} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2b+2c}{3}\right)\left(\frac{2b-c}{3}\right)\left(\frac{2c-b}{3}\right)\left(\frac{b+c}{3}\right)}}{2\left(\frac{2b+2c}{3}\right)} = \frac{1}{6}\sqrt{2(2b-c)(2c-b)}$$

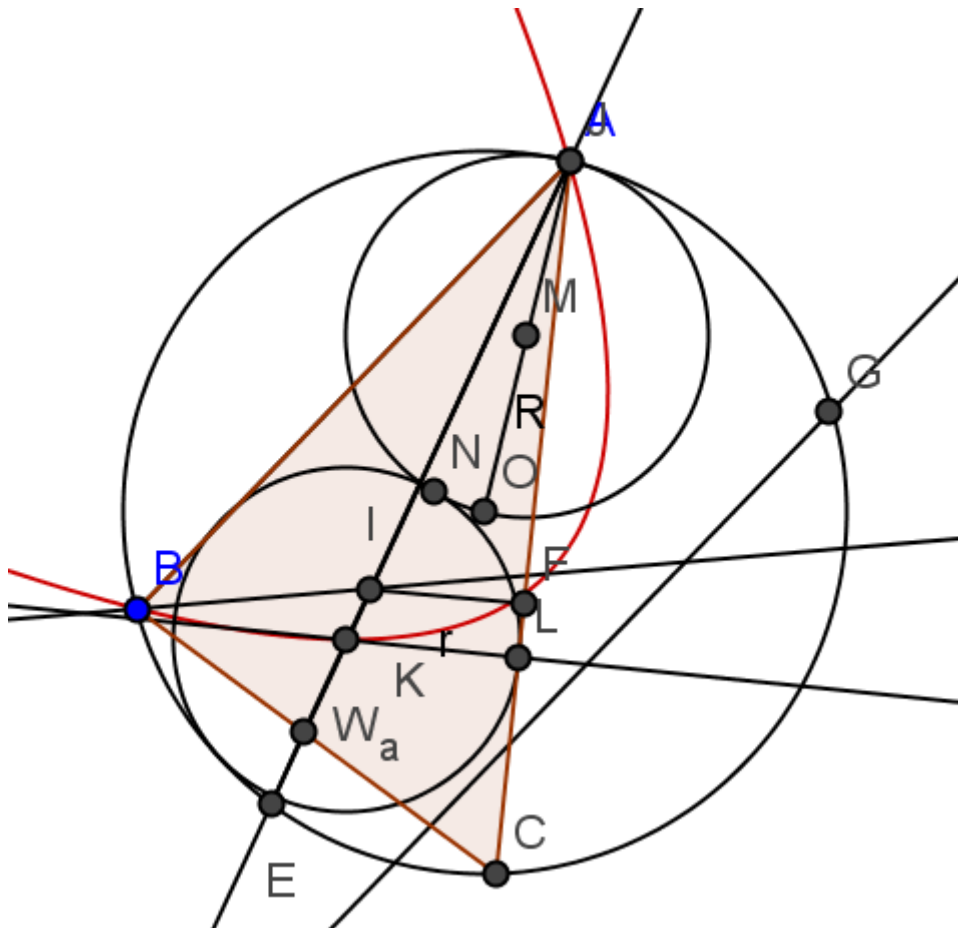
El incírculo mixtilinear de A es el tangente a AB , a AC y a (O).

El centro del mismo debe estar en la bisectriz del ángulo A para ser tangente a AB y a AC.

También al ser tangente a AB y a (O) debe pertenecer a la parábola de centro O y directriz una recta paralela a AB y a distancia R según el semiplano de AB que contiene a O.



El punto K es el centro de la circunferencia mixtilinear.



Se observa con geogebra la propiedad de ser tangentes (M) a (N) y a (O).

Veamos para algún caso particular la demostración.

Supongamos que el triángulo ABC es isósceles:

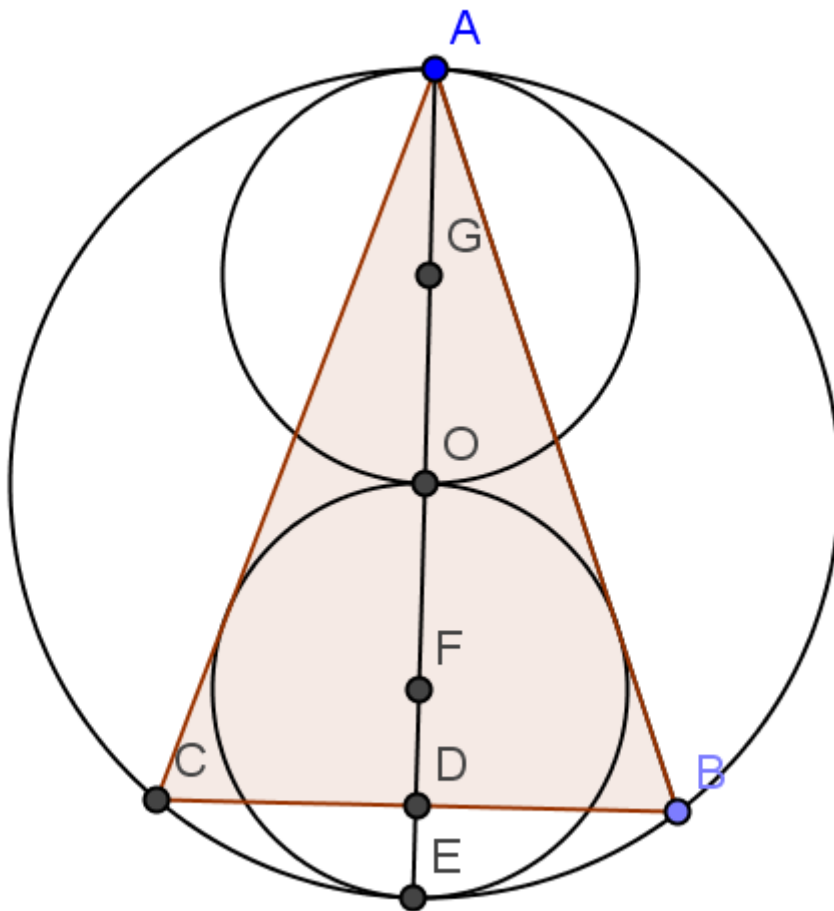
Sean $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. $a=(b+c)/3$.

$a=b$, $a=(a+c)/3 \rightarrow c=2a$. Degenerado.

$a=c$, $a=(b+a)/3 \rightarrow b=2a$. Degenerado.

$b=c$, $a=(b+c)/3$. Este caso sí es posible.

Podemos tomar sin pérdida de generalidad $b=c=3$, $a=2$.

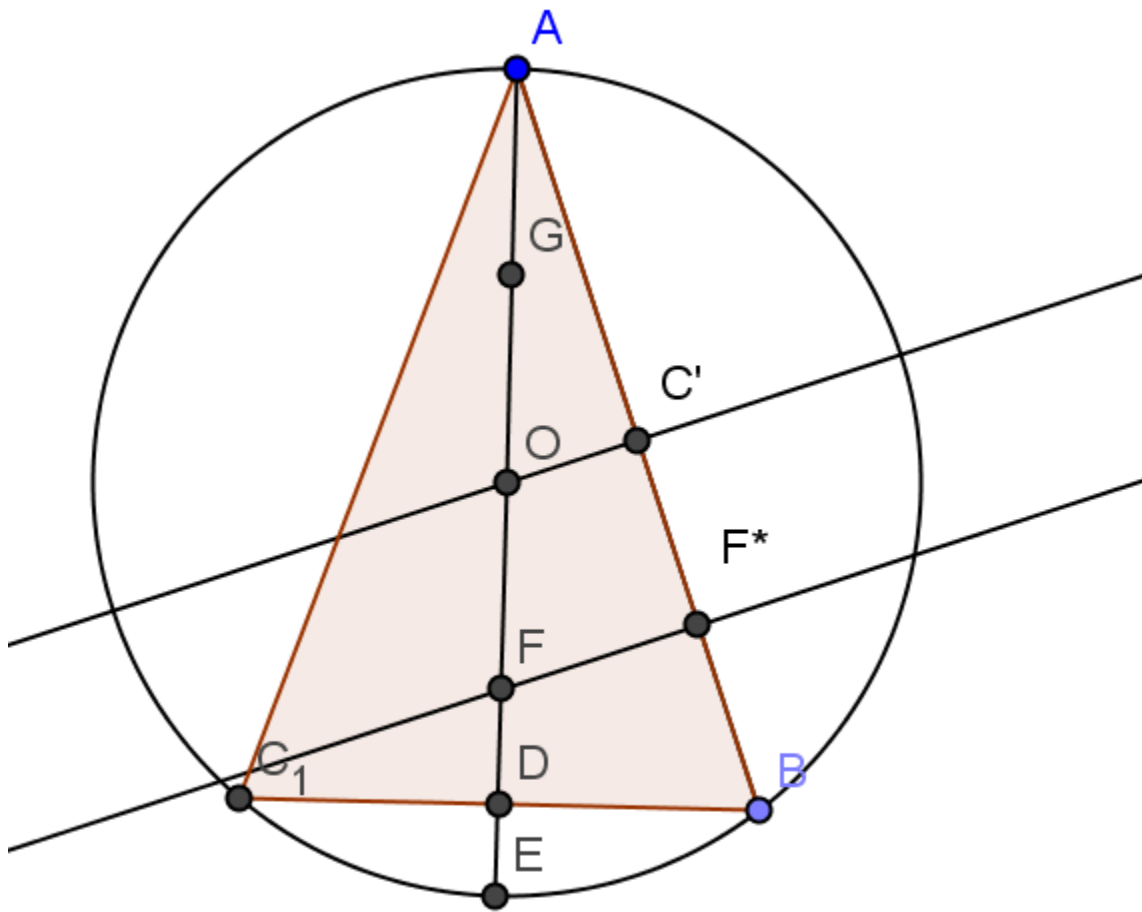


En este caso tenemos:

$$R = \frac{3bc}{4\sqrt{2(2b-c)(2c-b)}} = \frac{27}{4\sqrt{18}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

Así al ser la bisectriz de A mediatriz, siendo E el punto de corte de la mediatriz(bisectriz) de A con la circunferencia circunscrita, AE es diámetro, y el punto medio de OE, F , vemos que es el centro de la circunferencia mixtilinear de A.

$$\text{Es } AF = AO + OF = \frac{9\sqrt{2}}{8} + \frac{9\sqrt{2}}{16} = \frac{27\sqrt{2}}{16}$$



Sea C' el punto medio de AB y sea F^* el punto de corte de la perpendicular por F a AB con AB .

Es: $AF F^*$ semejante a AOC'

$$\frac{AF}{AF^*} = \frac{AO}{AC'} \rightarrow AF^* = \frac{\frac{3}{2} \frac{27\sqrt{2}}{16}}{\frac{9\sqrt{2}}{8}} = \frac{9}{4}$$

Así, $FF^* = \sqrt{AF^2 - AF^{*2}} = \sqrt{\left(\frac{27\sqrt{2}}{16}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} = FE$. Es decir, se cumple la propiedad.

Estudiemos otro caso, el ser ABC triángulo rectángulo.

Supongamos que los catetos son b y c

Sean $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. $a=(b+c)/3$.

Sería $a^2=b^2 + c^2$.

Es decir, $\frac{b^2+c^2+2bc}{9} = b^2 + c^2 \rightarrow 8b^2 + 8c^2 - 2bc = 0$

Tomemos un valor de c , por ejemplo $c=1$

$$8b^2 - 2b + 8 = 0 \rightarrow b = \frac{2 \mp \sqrt{4 - 256}}{16}, \text{no existe.}$$

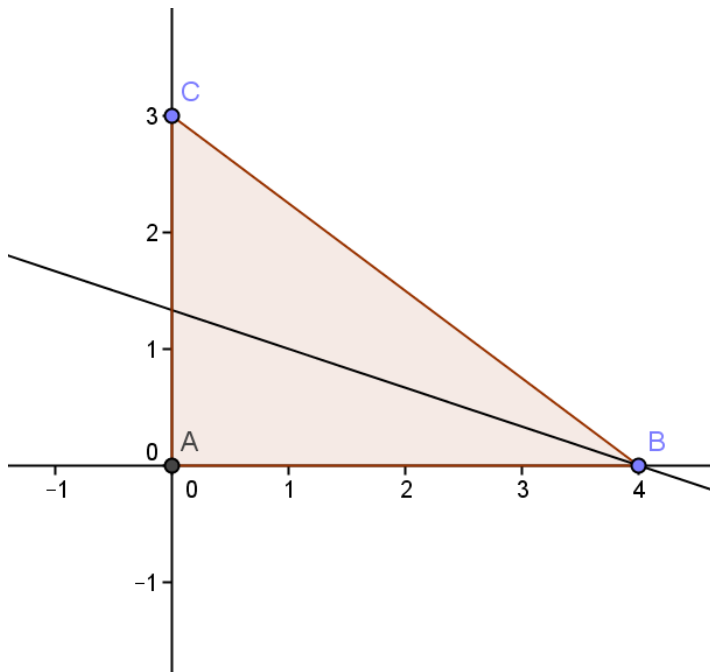
Sean los catetos a y b , sería

$$\frac{b^2 + c^2 + 2bc}{9} + b^2 = c^2 \rightarrow 10b^2 - 8c^2 + 2bc = 0.$$

Tomemos por ejemplo $c=1$,

$$10b^2 + 2b - 8 = 0 \rightarrow b = \frac{-2 \mp \sqrt{4 + 320}}{20} = -1, 4/5$$

Así el triángulo rectángulo sería $3/5, 4/5, 1$. Podemos tomar $a=3, b=4, c=5$.

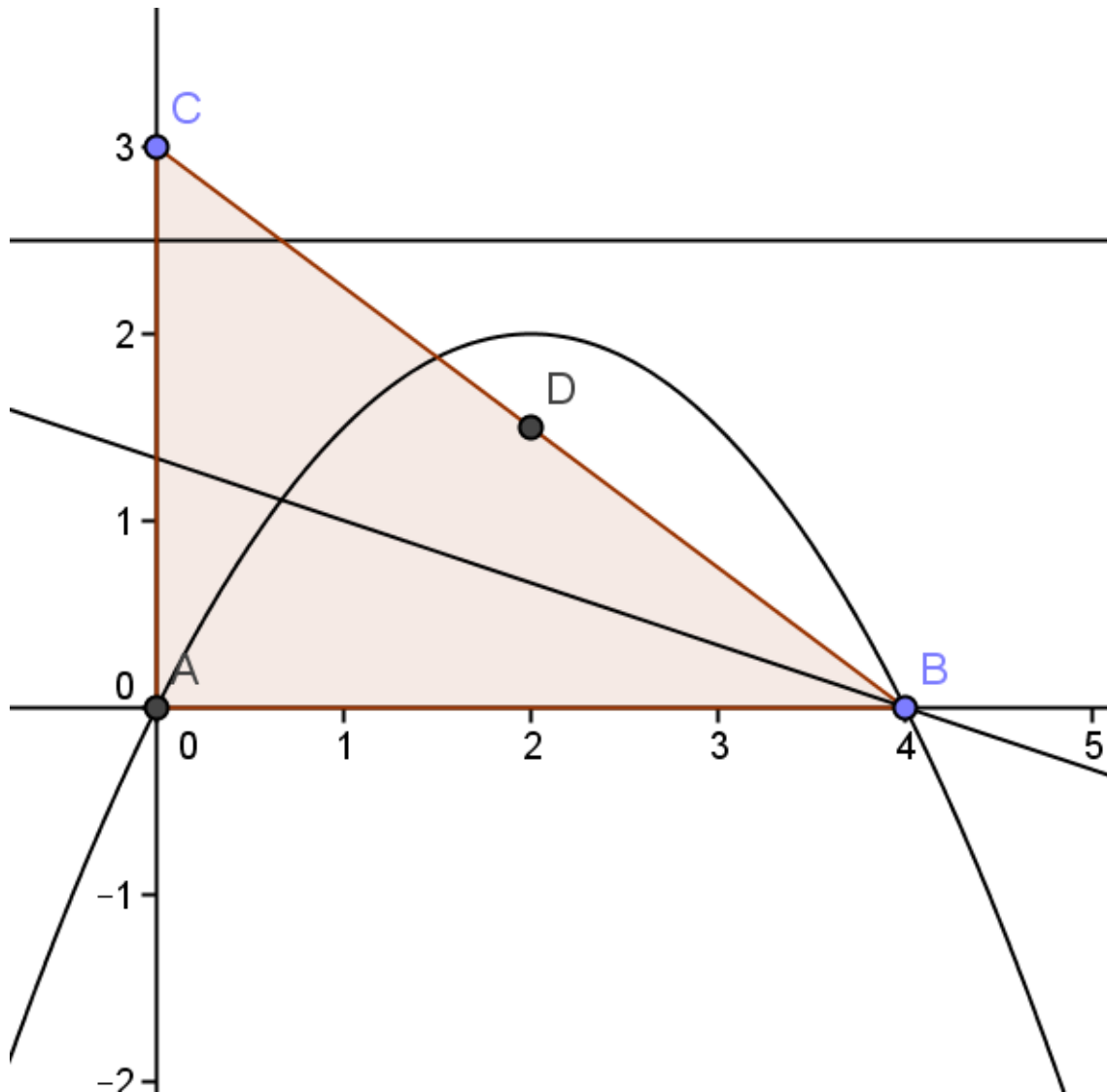


Si lo tomamos en unos ejes coordenados de origen C , sería $A(4,0), C(0,0) B(0,3)$.

O es $O(2,1.5)$. $R=2.5$

La bisectriz del ángulo A contiene a $A(4,0)$ y $W_a(0,4/3)$ siendo $y=-x/3+4/3$

Construyamos la parábola de centro O y directriz la paralela a AB a distancia $R=2.5$ en el semiplano que contiene a O :



La ecuación de la parábola es:

$$(x - 2)^2 + (y - 1.5)^2 = (y - 2.5)^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 3y + 2.25 = y^2 - 5y + 6.25$$

Es decir: $x^2 - 4x + 2y = 0$.

La intersección de la parábola con la bisectriz es la solución de la ecuación:

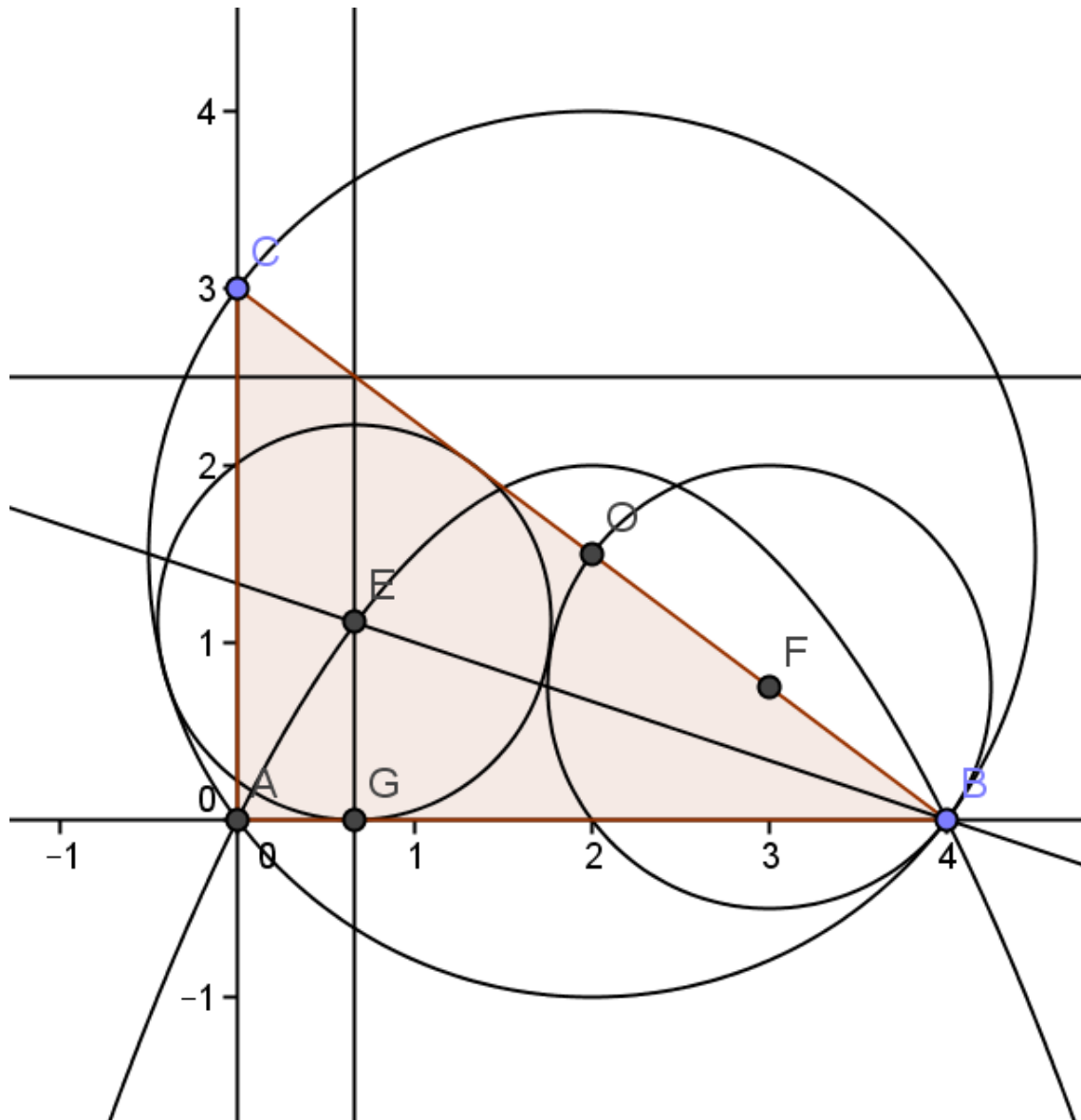
$$x^2 - 4x + 2\left(-\frac{x}{3} + \frac{4}{3}\right) = 0$$

Es decir $x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{8}{3} = 0$

Da lugar a $x=2/3$, 4, y a los puntos $E(2/3, 10/9)$, $B(4,0)$.

Sea la circunferencia mixtilínea de centro $E(2/3, 10/9)$ y radio $10/9$.

¿es tangente a la circunferencia de centro $F(3, 3/4)$ y radio $5/4$?



Lo que habremos de estudiar es si la suma de los radios es igual a la distancia de los centros.

La suma de los radios es $10/9 + 5/4 = 85/36$

La distancia de los centros es:

$$d\left(E\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{9}\right) F\left(3, \frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{\left(3 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{10}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{169}{1296}} = \sqrt{\frac{7056 + 169}{1296}} = \sqrt{\frac{7225}{1296}} = \frac{85}{36}$$

c.q.d, son tangentes.

