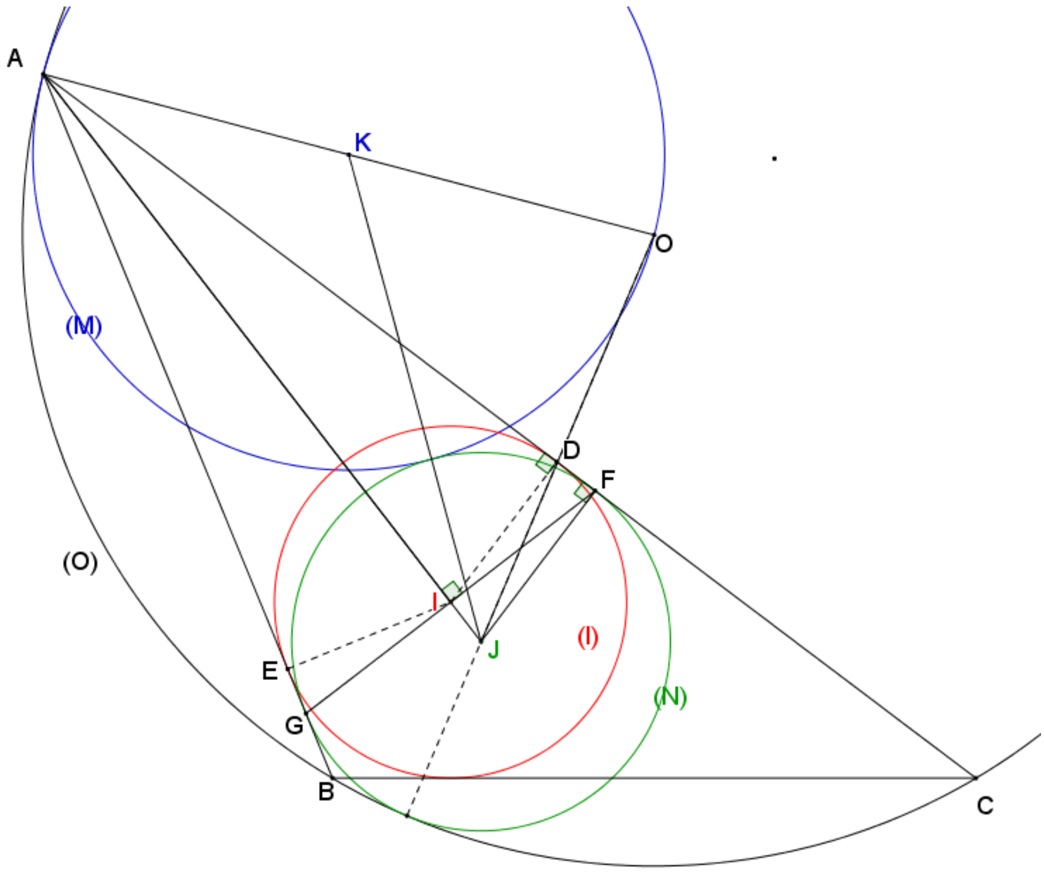
**Problema 880**
Sean a=BC, b=CA, c=AB. a=(b+c)/3.
O el circuncentro de ABC. I el incentro de ABC.
(O) la circunferencia circunscrita  a ABC
(M) circunferencia de diámetro AO.
(N) el incírculo mixtilinear de A (círculo tangente a AB, AC y a (O)).
Probar que (M) es tangente a (O) y a (N).
**Suppa, E. (2018):** Comunicación personal.

**Solution proposée par Philippe Fondanaiche**




On désigne par :
- D et E les points de contact du cercle inscrit (I) de centre I avec les côtés AC et AB du triangle ABC
- F et G les points de contact du cercle (N) mixtilinéaire en A avec ces mêmes côtés,
- J le centre du cercle (N) et K le centre du cercle (M) de diamètre AO.
- R,r et ρ les rayons des cercles (O),(I) et (N)
- p le demi-périmètre du triangle ABC et Δ l'aire de ce même triangle

On va démontrer que le cercle (M) est tangent au cercle (N) en trois étapes:
1) Construction du cercle (N) mixtilinéaire en A
2) Calcul des rayons R,r et ρ à partir de la relation 3a = b + c
3) Démonstation de la relation KJ = R/2 + ρ

**1) Construction du cercle (N) mixtilinéaire en A**
**Lemme** : les points F,G et I sont alignés sur une droite perpendiculaire en I à la bissectrice AI.
La démonstration de ce lemme est donnée dans l'article A new mixtilinear incircle adventure de Jean-Louis Aymé.
Il en résulte que le point J est à l'intersection de la droite AI et des perpendiculaires en F et G aux côtes AC et AB.
**Corollaire**: d'après le théorème de Thalès, on a AF/AD = AJ/AI = ρ/r

**2) Calcul des rayons R,r et $\rho$**

La relation $3a = b + c$ entraine $3p = 2(b + c)$. D'où $p = 2a$.
$p - a = (b + c)/3$, $p - b = (2c - b)/3$ et $p - c = (2b - c)/3$.
$\Delta = pr$. D'où $r^2 = \Delta^2/p^2 = (p - a).(p - b).(p - c)/p = (2c - b).(2b - c)/18$
$AD = AE = (- a + b + c)/2 = (b + c)/3 = a$.
$AI^2 = AD^2 + DI^2 = a^2 + r^2 = (b+c)^2/9 + (2c - b).(2b - c)/18 = bc/2$
ID étant la hauteur issue de I dans le triangle rectangle AIF, on a la relation $AD.AF = AI^2$ D'où $AF = bc/2a$.
Par ailleurs on sait que $R = abc/4\Delta = abc/4pr = bc/8r$. D'où $4Rr = bc/2$
D'après le corollaire de 1), on a $\rho/r = AF/AD = bc/2a^2$
Il en résulte que $4R\rho = 4Rr.(\rho/r) = bc/2.(bc/2a^2) = (bc/2a)^2$ soit $\mathbf{4R\rho = AF^2}$

**3) Démonstration de la relation $JK = R/2 + \rho$**

JK est la médiane issue de J dans le triangle JAO. On a la relation bien connue de la médiane:
$JK^2 = JA^2/2 + JO^2/2 - OA^2/4$
Or $JA^2 = AF^2 + \rho^2$ , $JO^2 = (R - \rho)^2$ et $OA^2 = R^2$
Il en résulte que $JK^2 = 2R\rho + \rho^2/2 + R^2/2 + \rho^2/2 - R\rho - R^2/4 = R^2/4 + \rho^2 + R\rho$.
D'où $JK^2 = (R/2 + \rho)^2$ et **$JK = R/2 + \rho$ qui prouve que les deux cercles (M) et (N) sont tangents.**
C.q.f.d

On note par ailleurs que le cercle (M) est évidemment tangent au cercle (O) car par construction OA est en même temps diamètre de (M) et rayon de (O).