

Problema 881

B.5954. Una recta l contiene al vértice A de un triángulo ABC y es paralela a BC . Sean K y L los puntos de intersección de l con las bisectrices internas de los ángulos ABC y ACB , respectivamente. El círculo inscrito del triángulo ABC es tangente a BC en D . Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo ABC y el círculo de Thales del segmento KL (el círculo de diámetro KL) intersecan en dos puntos que son colineales con D .

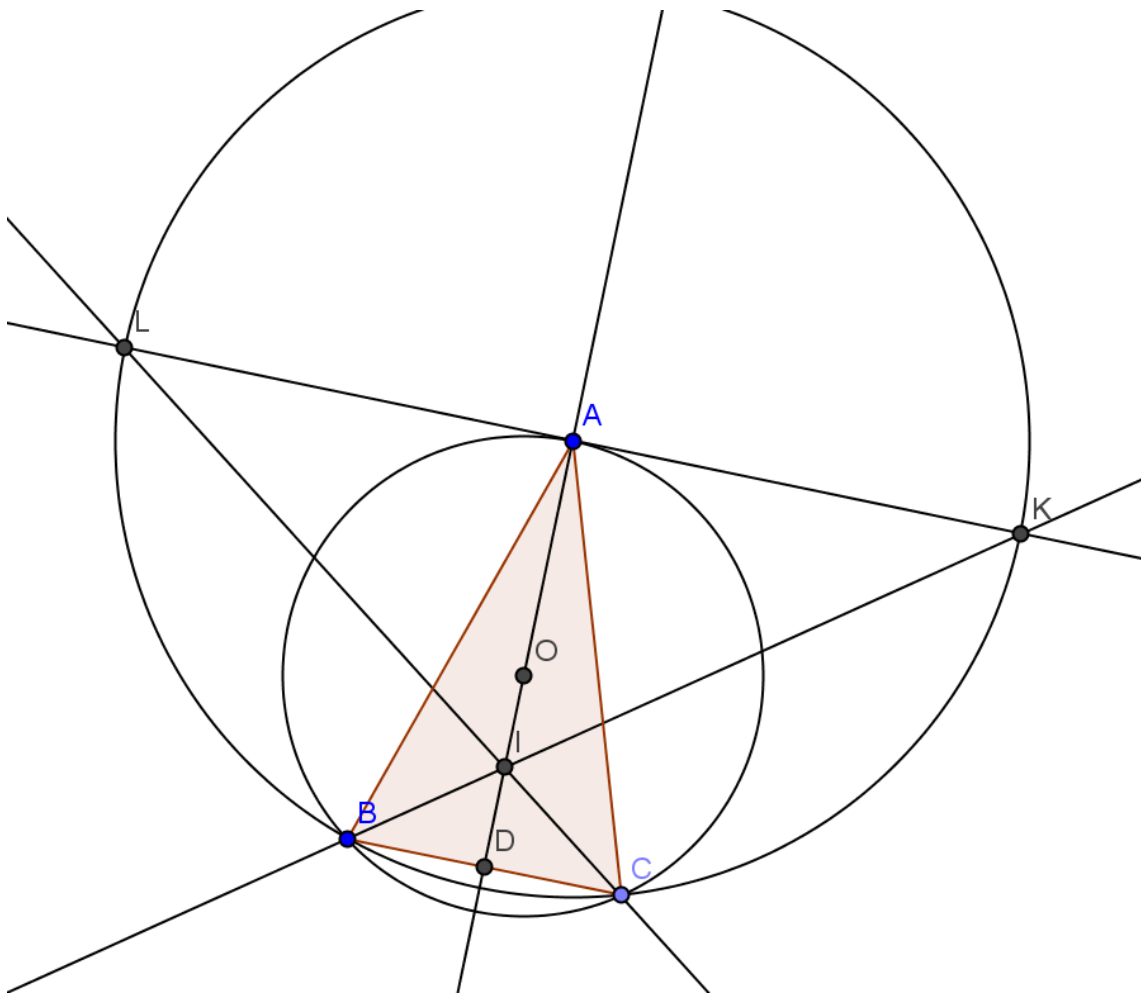
Komal (2018). Abril.

Solución parcial del director.

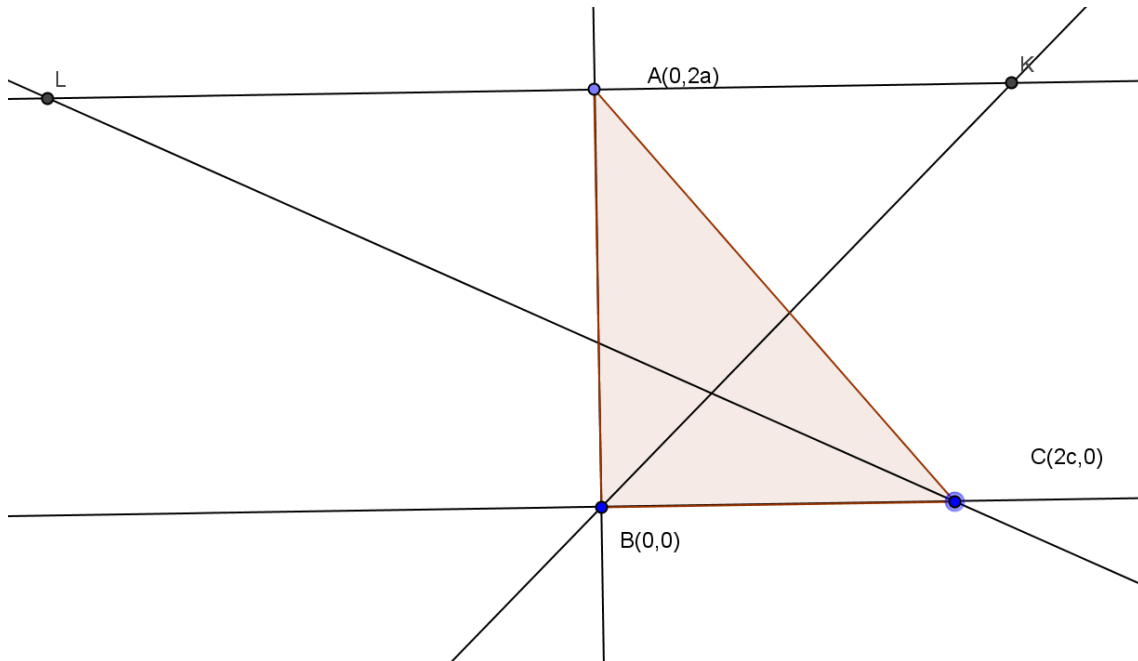
Sea el caso del triángulo isósceles ABC con $AB=AC$.

Los triángulos ABK y ACL son isósceles.

En tal caso, el segmento KL es paralelo a BC , con $AK=AL=AB=AC$, por lo que el círculo de Thales de KL tiene de centro A y radio $AB=AC$ contiene a los puntos B y C , y la intersección con el círculo circunscrito a ABC es BC . Así se verifica la propiedad pedida.



Caso de triángulo rectángulo.



Tomemos coordenadas.

Sean $A(0, 2a)$, $B(0, 0)$, $C(2c, 0)$

Los lados son $2a$, $2c$, $2\sqrt{a^2 + c^2}$

El punto de tangencia de la inscrita con BC es

$$D(c + a - \sqrt{a^2 + c^2})$$

La circunferencia circunscrita es

$$(x - c)^2 + (y - a)^2 = (\sqrt{c^2 + a^2})^2 \rightarrow x^2 - 2cx + y^2 - 2ay = 0$$

Por otra parte, los puntos L y K son:

$$L(-2\sqrt{c^2 + a^2}, 2a), K(2a, 2a)$$

Así, la circunferencia de Thales de KL es:

$$(x - a + \sqrt{c^2 + a^2})^2 + (y - 2a)^2 = (a + \sqrt{c^2 + a^2})^2$$

Simplificando:

$$x^2 + x(-2a + 2\sqrt{c^2 + a^2}) + y^2 - 4ay - 4a\sqrt{c^2 + a^2} + 4a^2 = 0$$

La intersección con la circunscrita, $x^2 - 2cx + y^2 - 2ay = 0$

Da lugar al eje radical,

$$2x(c - a + \sqrt{c^2 + a^2}) - 2ya - 4a\sqrt{c^2 + a^2} + 4a^2 = 0$$

$$y = \frac{c - a + \sqrt{c^2 + a^2}}{a}x + 2a - 2\sqrt{c^2 + a^2}$$

La intersección del eje radical de ambas circunferencias con el eje x es:

$$x = \frac{2a\sqrt{c^2+a^2}-4a^2}{c-a+\sqrt{c^2+a^2}} = a + c - \sqrt{c^2 + a^2}.$$

Así el punto de tangencia $D(a + c - \sqrt{c^2 + a^2})$ verifica lo pedido.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.