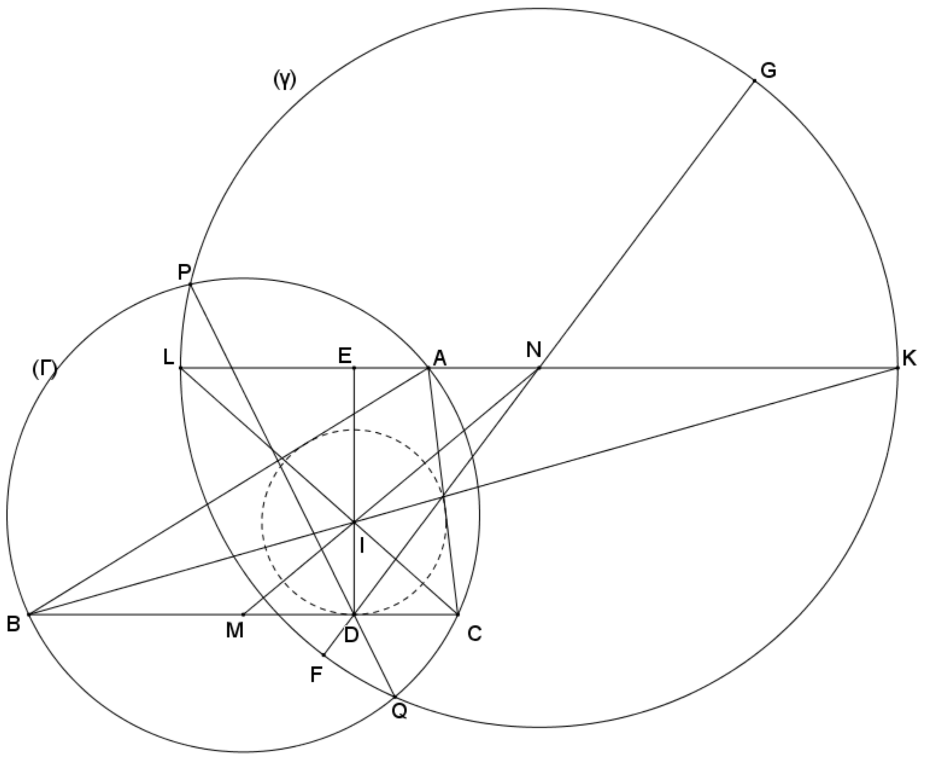
Problema 881

B.5954. Una recta *l* contiene al vértice A de un triángulo ABC y es paralela a BC. Sean K y L los puntos de intersección de *l* con las bisectrices internas de los ángulos ABC y ACB, respectivamente. El círculo inscrito del triángulo ABC es tangente a BC en D. Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo ABC y el círculo de Thales del segmento KL (el círculo de diámetro KL) intersecan en dos puntos que son colineales con D.

Komal (2018). Abril.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme: le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles est l'axe radical de ces deux cercles. Quand ceux-ci ont deux points d'intersection P et Q, l'axe radical est la droite PQ.

La démonstration de ce lemme est donnée dans l'article disponible sur Wikipedia: Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soient (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC et (γ) le cercle de diamètre KL qui admettent P et Q pour point d'intersection.

Si le point D a même puissance par rapport à ces deux cercles, alors d'après le lemme, D est sur la droite PQ.

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, p = demi-périmètre $= (a + b + c)/2$.

D'où $p - a = (-a + b + c)/2$, $DB = (a - b + c)/2 = p - b$ et $DC = (a + b - c)/2 = p - c$.

Soit $r = ID$ = rayon du cercle inscrit du triangle ABC de centre I.

D'après la formule de Héron on a Δ^2 = carré de l'aire du triangle ABC $= p(p - a).(p - b).(p - c)$.

Comme $\Delta = pr = ha/2$, il en résulte $h/r = 2p/a$ et $h^2 = 4p(p - a).(p - b).(p - c)/a^2$.

La droite ID coupe la droite KL au point E. Soient M et N les milieux respectifs des segments BC et KL.

La droite DN coupe le cercle (γ) aux points F et G.

D'après le théorème de Thalès on a $EK/DB = EL/DC = IE/ID = k = (h - r)/r.= h/r - 1 = (2p/a - 1) = (b+c)/a$

La puissance $P_\Gamma(D)$ du point D par rapport au cercle (Γ) est égale à $P_\Gamma(D) = DB.DC = (p - b).(p - c)$

La puissance $P_\gamma(D)$ de ce même point par rapport au cercle (γ) est égale à :

$P_\gamma(D) = DF.DG =(NF - DN)(NG + DN)$ soit $P_\gamma(D) = (NF - DN)(NF + DN) = NF^2 - DN^2 = NK^2 - NE^2 - DE^2$

soit $P_\gamma(D) = (NK + NE).(NK - NE) - h^2$ ou encore **$P_\gamma(D) = EK.EL - h^2 = k^2DB.DC - h^2$.**

Il s'agit de démontrer que $k^2DB.DC - h^2 = DB.DC$ soit $h^2 = (k^2 - 1)DB.DC$ ou encore:

$4p.(p - a)/a^2 = k^2 - 1 = (b + c)^2/a^2 - 1 = (a + b + c)(-a + b + c)/a^2$. Or $a + b + c = 2p$ et $-a + b + c = 2(p - a)$.

C.q.f.d.