

Problema 881

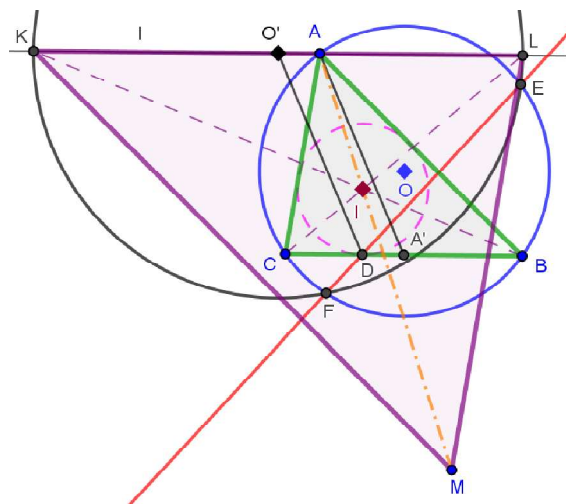
B.5954. Una recta l contiene al vértice A de un triángulo ABC y es paralela a BC . Sean K y L los puntos de intersección de l con las bisectrices internas de los ángulos ABC y ACB , respectivamente. El círculo inscrito del triángulo ABC es tangente a BC en D . Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo ABC y el círculo de Thales del segmento KL (el círculo de diámetro KL) intersecan en dos puntos que son colineales con D .

[Komal](#) (2018). Abril.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sean O' el punto medio de KL y A' el punto medio de BC ; O e I el circuncentro y el incentro de ABC respectivamente y s su semiperímetro. Supongamos $c > b$.

La circunferencia de diámetro KL y la circunscrita se cortan en los puntos E y F . Tenemos que demostrar que están alineados con D o, lo que es equivalente, que D pertenece al eje radical de estas circunferencias.



La homotecia de centro I y razón $\frac{h-r}{r}$, donde h es la altura de ABC desde A y r el radio de su circunferencia inscrita, transforma el triángulo ILK en el ICB .

El segmento KL , homotético del BC tiene longitud $a' = a \cdot \frac{h-r}{r} = \frac{ah-ar}{r} = \frac{2sr-ar}{r} = b + c$.

Por tanto la razón de la homotecia es $k = \frac{b+c}{a}$. Esta homotecia también transforma el triángulo ABC en el MKL . MA es una bisectriz de este triángulo. Si aplicamos aquí el teorema de la bisectriz tendremos $LA = \frac{LM \cdot KL}{MK + ML} = \frac{bk \cdot (b+c)}{(c+b) \cdot k} = b$ y sin más, $AK = c$.

Vamos a calcular la potencia de D respecto de cada circunferencia. El punto de contacto de la circunferencia inscrita con el lado BC divide a este segmento en otros dos de longitudes $s - b$ y $s - c$ respectivamente. Podemos poner pues $\text{Pot}(D; (O)) = -(s - b)(s - c)$.

La potencia respecto de (KL) es igual $\text{Pot}(D; (KL)) = DO'^2 - \left(\frac{KL}{2}\right)^2$.

En la figura **se ve** que la distancia de D al centro es igual a la longitud de la mediana de A del triángulo ABC . La demostración es inmediata: basta con ver que los segmentos AO' y $A'D$ son iguales. $AO' = \frac{b+c}{2} - b = \frac{c-b}{2}$; $A'D = s - b - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2}$. De todo esto

$$\begin{aligned} \text{Pot}(D; (KL)) &= DO'^2 - O'L^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc - a^2}{4} \\ &= \frac{(b-c)^2 - a^2}{4} = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{4} = -(s-b)(s-c). \blacksquare \end{aligned}$$