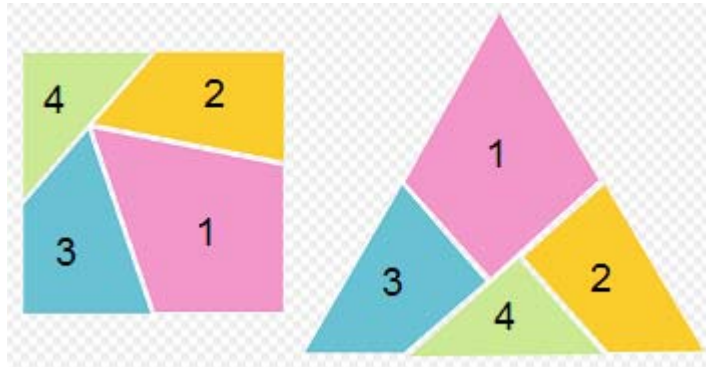


TRIÁNGULOS CABRI PROBLEMA 882

(Dudeney, H. D. (1907): The Project Gutenberg eBook of The Canterbury Puzzles), a partir de un triángulo equilátero de lado 1, sabiendo que el lado del triángulo tiene longitud unidad y que ambas figuras tienen la misma superficie, calcular las dimensiones de cada una de las piezas del siguiente puzzle de Haberdasher:



(Triángulos Cabri nº 882)

Solución:

Para simplificar los cálculos, vamos a suponer que:

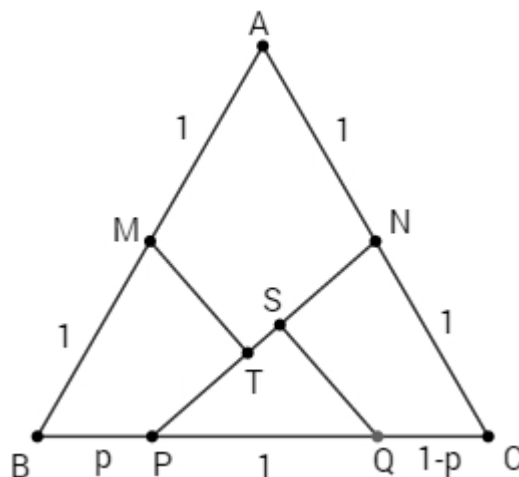
$$l_{\text{triángulo}} = 2 \Rightarrow_{\text{Conway}} S_A = S_B = S_C = 2$$

por lo que:

$$\Delta = \sqrt{3} \Rightarrow l_{\text{cuadrado}} = \sqrt[4]{3}$$

Además, en las figuras se observa que:

$$\begin{cases} AN = NC = 1 \\ AM = MB = 1 \end{cases} \quad BP + QC = PQ = 1 \quad 2TM = l_{\text{cuadrado}} = \sqrt[4]{3}$$



TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 882

por lo que, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , resulta que:

$$\begin{cases} M = (1 : 1 : 0) \\ N = (1 : 0 : 1) \\ P = (0 : 2 - p : p) \\ Q = (0 : 1 - p : 1 + p) \end{cases} \quad (0 < p < 1)$$

luego:

$$PN \equiv 0 = (p - 2)x - py + (2 - p)z \Rightarrow PN_{\infty}^{\perp} = (6 - 4p : 2p : -6 + 2p)$$

siendo:

$$MT \equiv 0 = 2(p - 3)x + 2(3 - p)y + 6(p - 1)z$$

y, por tanto:

$$T = MT \cap PN = (-2p^2 + 4p - 3 : (2 - p)(2p - 3) : p - 3) = \left(\frac{-2p^2 + 4p - 3}{4(p^2 - 3p + 3)} : \frac{(2 - p)(2p - 3)}{4(p^2 - 3p + 3)} : \frac{p - 3}{4(p^2 - 3p + 3)} \right)$$

Ya podemos calcular el valor de p , pues, como:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = MT^2 = 2 \left[\left(\frac{-2p^2 + 4p - 3}{4(p^2 - 3p + 3)} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{(2 - p)(2p - 3)}{4(p^2 - 3p + 3)} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p - 3}{4(p^2 - 3p + 3)} \right)^2 \right] = \frac{3}{4(p^2 - 3p + 3)}$$

entonces:

$$p = \frac{3}{2} - \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{4}} \Rightarrow \begin{cases} BP = p = \frac{3}{2} - \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{4}} \\ QC = 1 - p = \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por otro lado, como:

$$SQ \equiv 0 = (2p^2 - 3p + 3)x + (2p - 3)(p + 1)y + (2p - 3)(p - 1)z$$

entonces:

$$\begin{aligned} S &= SQ \cap PN \\ &= (3 - 2p : (2 - p)(2p^2 - 4p + 3) : 2p^3 - 4p^2 + p + 3) \\ &= \left(\frac{3 - 2p}{4(p^2 - 3p + 3)} : \frac{(2 - p)(2p^2 - 4p + 3)}{4(p^2 - 3p + 3)} : \frac{2p^3 - 4p^2 + p + 3}{4(p^2 - 3p + 3)} \right) \end{aligned}$$

TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 882

y:

❶ Como:

$$\begin{aligned} SQ^2 &= 2 \left[\left(\frac{3-2p}{4(p^2-3p+3)} \right)^2 + \left(\frac{(2-p)(2p^2-4p+3)}{4(p^2-3p+3)} - \frac{1-p}{2} \right)^2 + \left(\frac{2p^3-4p^2+p+3}{4(p^2-3p+3)} - \frac{1+p}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{4(p^2-3p+3)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

resulta que $SQ = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$.

❷ Como:

$$\begin{aligned} SP^2 &= 2 \left[\left(\frac{3-2p}{4(p^2-3p+3)} \right)^2 + \left(\frac{(2-p)(2p^2-4p+3)}{4(p^2-3p+3)} - \frac{2-p}{2} \right)^2 + \left(\frac{2p^3-4p^2+p+3}{4(p^2-3p+3)} - \frac{p}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4p^2-12p+9}{4(p^2-3p+3)} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

resulta que $SP = \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2}$.

❸ Como:

$$\begin{aligned} TN^2 &= 2 \left[\left(\frac{-2p^2+4p-3}{4(p^2-3p+3)} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{(2-p)(2p-3)}{4(p^2-3p+3)} \right)^2 + \left(\frac{p-3}{4(p^2-3p+3)} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4p^2-12p+9}{4(p^2-3p+3)} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

resulta que $TN = \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2}$.

❹ Como:

$$\begin{aligned} PN^2 &= 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2-p}{2} \right)^2 + \left(\frac{p-1}{2} \right)^2 \right] \\ &= p^2 - 3p + 3 \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

TRIÁNGULOS CABRI

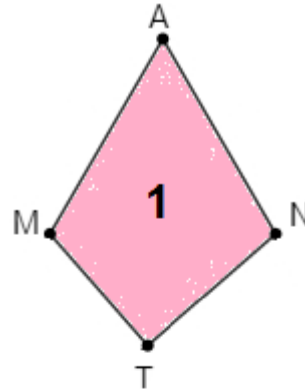
PROBLEMA 882

resulta que $PN = \sqrt[4]{3}$.

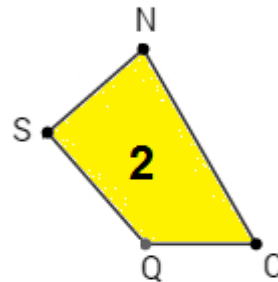
$$\textcircled{5} \quad SN = PN - PS = \sqrt[4]{3} - \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{2} = PN - TN = PT$$

Finalmente, como el lado del triángulo dado tiene longitud unidad, tenemos que dividir entre dos las dimensiones de todas las piezas:

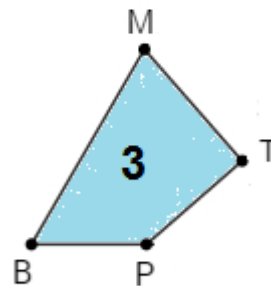
$$\textcircled{1} \quad \text{Pieza 1:} \quad \begin{cases} AM = \frac{1}{2} \\ AN = \frac{1}{2} \\ MT = \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \\ TN = \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{4} \end{cases}$$



$$\textcircled{2} \quad \text{Pieza 2:} \quad \begin{cases} NC = \frac{1}{2} \\ SQ = \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \\ QC = \frac{\sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{4}}}{2} - \frac{1}{4} \\ NS = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} - \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{4} \end{cases}$$



$$\textcircled{3} \quad \text{Pieza 3:} \quad \begin{cases} BM = \frac{1}{2} \\ MT = \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \\ BP = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{4}}}{2} \\ PT = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} - \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{4} \end{cases}$$



$$\textcircled{4} \quad \text{Pieza 4:} \quad \begin{cases} PQ = \frac{1}{2} \\ SP = \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{4} \\ SQ = \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \end{cases}$$

