
Pr. Cabri 883

■ Enunciado

Sea un triángulo rectángulo ABC con hipotenusa BC y con círculo circunscrito (Γ) . Trazamos en BC el punto D, simétrico de C respecto a H, pie de la altura de A. Trazamos (Γ_1) , círculo de diámetro BD y (Δ) , perpendicular a la recta BC por D.

Q1. Probar que cualquiera que sea la posición de H en BC, se puede construir con regla y compás un punto P sobre (Δ) que es centro de un círculo (γ) tangente al círculo (Γ_1) y a la recta AD.

Q2. Demostrar que el círculo (γ) es tangente al círculo (Γ)

Q3. Cuando H recorre la hipotenusa BC, hallar el lugar del punto P.

Fondanaiche, P. (2018) A partir de un sangaku.

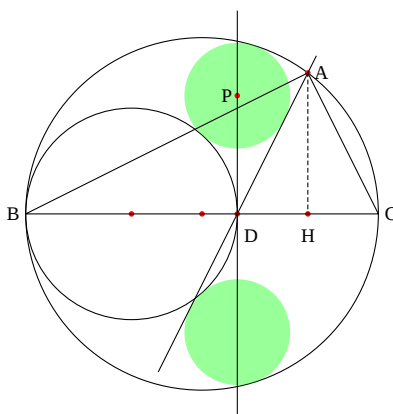
■ Solución de César Beade Franco

Q1 y Q2. Consideremos los puntos $A(a, \sqrt{4+a^2})$, $B(-2,0)$ y $C(2,0)$. Entonces obtenemos $H(a,0)$ y $D(2a-2)$.

En estas condiciones la circunferencia de diámetro BD tiene como centro $Q(a-2)$ y como radio a .

El punto P situado sobre la vertical de d será $P(2a-2,p)$.

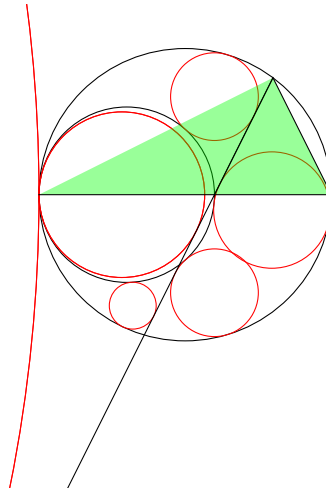
Para calcular P consideramos que la distancia de P a la recta AD es la misma que su distancia a la circunferencia Γ_1 y esta es igual a la distancia PQ menos el radio r_1 de Γ_1 .



La solución de la ecuación $d(P, r(AB)) = d(P, Q) - r$ nos proporciona los puntos simétricos $P(2a-2, \pm \frac{4a\sqrt{2-a}}{2+a})$. El radio de γ resulta ser $r = \frac{2(2-a)a}{2+a}$.

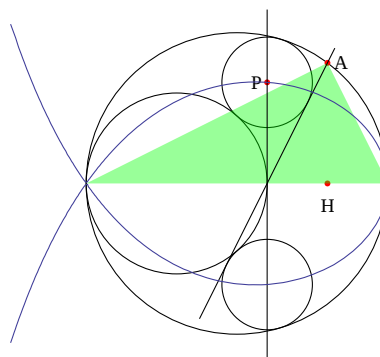
Comprobamos que γ es también tangente a Γ (de centro $O(0,0)$ y radio 2). Para ello vemos que $D(P, O) + r = 2$, lo que efectivamente sucede.

Vemos que estamos ante un tipo de problema de Apolonio (caso RCC). Se trata de encontrar circunferencias tangentes a otras dos y a una recta. Si no hubiera restricciones habría aquí 6 soluciones.



Existen varios métodos para dibujar este problema con regla y compás (Gergonne, inversión,...). Se tratan detalladamente en el libro de J.M. Pedret "Los problemas de contacto de Apolonio".

Q3. Podemos considerar las coordenadas de $P(2a-2, \frac{4a\sqrt{2-a}}{2+a})$ como las ecuaciones paramétricas del lugar buscado. Si eliminamos el parámetro a (*Mathematica*) obtenemos la cúbica $8x^3 + x^2(16 + y^2) + x(-32 + 12y^2) = 64 - 36y^2$



Si cambiamos P de cuadrante obtenemos otra cúbica simétrica.