

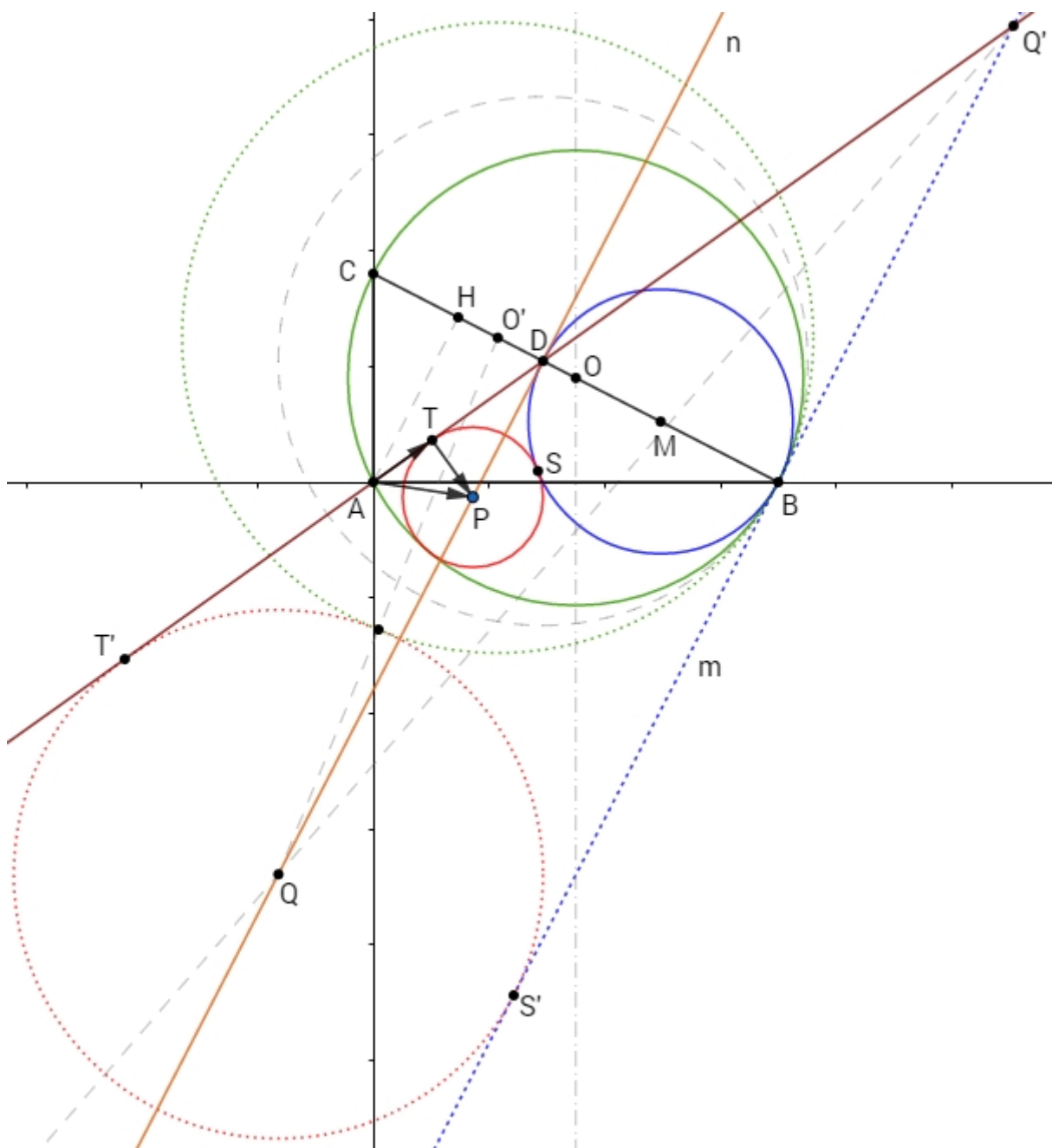
TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 883

(Fondanaiche, P. (2018), a partir de un sangaku) Dado un triángulo ABC con hipotenusa BC y circuncírculo (O) , se traza en BC el punto D simétrico de C respecto del pie H de la altura de A . A continuación, se trazan la circunferencia (M) con diámetro BD y la recta n perpendicular a BC pasando por D :

- ① Probar que, cualquiera que sea la posición de H en BC , se puede construir con regla y compás un punto P sobre n que es centro de una circunferencia (P) tangente a la circunferencia (M) y a la recta AD .
- ② Demostrar que la circunferencia (P) es tangente al circuncírculo (O) .
- ③ Cuando H recorre la hipotenusa BC , hallar el lugar geométrico que describe el punto P .

Solución:



TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 883

① Considerando la inversión con respecto a la circunferencia (D) con centro D y radio DB , resulta que la recta n queda invariante (por pasar por el centro de inversión) y la circunferencia (M) se transforma en la recta m . Además, si Q' es el punto de intersección entre las rectas AD y m y consideramos el punto Q de intersección entre la recta n y la bisectriz del ángulo $\triangle AQ'B$, como el punto Q equidista de las rectas AD y m , podemos construir una circunferencia (Q) con centro Q y tangente a ambas rectas en los puntos T' y S' , respectivamente. La inversión considerada transforma esta circunferencia (Q) en otra circunferencia (P) centrada en un punto P alineado con Q y D (es decir, situado sobre la recta n) y tangente a la recta AD en el punto T y a la circunferencia (M) en el punto S .

② Vamos a distinguir dos casos:

- ❶ Si $b = c$, entonces, $H = O$, por lo que $D = B = P$ y, en este caso, las circunferencias (M) y (P) se reducen al punto B , que está situado sobre el circuncírculo (O) .
- ❷ Si $b \neq c$, vamos a suponer que $b < c$ (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga) y vamos a considerar el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en A y eje de abscisas en la recta AB , tomando como unidad de medida la longitud del cateto $c = AB$, por lo que, si $0 < s = \frac{b}{c} < 1$ es la razón entre ambos catetos, resulta que:

$$\begin{cases} A = (0, 0) \\ B = (1, 0) \\ C = (0, s) \end{cases}$$

y:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (1, -s) \\ \overrightarrow{AH} = (s, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \equiv y = -s(x - 1) \\ AH \equiv y = \frac{x}{s} \end{cases} \Rightarrow H = AH \cap BC = \left(\frac{s^2}{s^2 + 1}, \frac{s}{s^2 + 1} \right) \Rightarrow D = \left(\frac{2s^2}{s^2 + 1}, \frac{2s}{s^2 + 1} - s \right)$$

por lo que:

$$\begin{cases} AD \equiv y = \left(\frac{1-s^2}{2s} \right)x \\ m \equiv y = \frac{x-1}{s} \end{cases} \Rightarrow Q' = m \cap AD = \left(\frac{2}{s^2 + 1}, \frac{1-s^2}{s(s^2 + 1)} \right)$$

y, como el triángulo $QQ'D$ es isósceles, entonces:

$$QD = Q'D = \frac{1-s^2}{s}$$

siendo, además:

$$\begin{cases} r = DB = \frac{1-s^2}{\sqrt{s^2 + 1}} \\ R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{2} \end{cases}$$

los respectivos radios de las circunferencias (Q) y (O) .

TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 883

Por otro lado, como la circunferencia (O) se transforma en la circunferencia (O') con centro O' y cuyo radio es:

$$R' = \frac{r^2 R}{|OD^2 - R^2|} = \frac{r^2 R}{|(r-R)^2 - R^2|} = \frac{r^2 R}{|r^2 - 2rR|} = \frac{rR}{|r - 2R|} = \frac{(1-s^2)\sqrt{s^2+1}}{4s^2}$$

entonces:

$$4rR' = 4\left(\frac{1-s^2}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \frac{(1-s^2)\sqrt{s^2+1}}{4s^2} = \left(\frac{1-s^2}{s}\right)^2 = QD^2$$

por lo que:

$$2rR' = QD^2 - 2rR'$$

$$(R' + r)^2 = QD^2 + (R' - r)^2$$

$$(R' + r)^2 = QD^2 + O'D^2$$

$$(R' + r)^2 = O'Q^2$$

$$r + R' = O'Q$$

y, por tanto, las circunferencias (O') y (Q) son tangentes, lo cual nos asegura que también lo son las circunferencias (O) y (P) , ya que éstas son las transformadas de las otras por la inversión considerada y toda inversión conserva la tangencia.

- ③ Cuando $0 < s < 1$, el punto H recorre la mitad de hipotenusa CB (en este sentido) comprendida entre el punto C y el punto medio O del segmento CB y, cuando $1 < s < +\infty$, el punto H recorre la mitad de hipotenusa CB (en este sentido) comprendida entre el punto medio O del segmento CB y el punto B . Además, suponiendo que $0 < s < 1$ (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga), como:

$$QD^2 = r^2 + T'D^2 \Rightarrow T'D^2 = \left(\frac{1-s^2}{s}\right)^2 - \left(\frac{1-s^2}{\sqrt{s^2+1}}\right)^2 = \frac{(1-s^2)^2}{s^2(s^2+1)} \Rightarrow T'D = \frac{1-s^2}{s\sqrt{s^2+1}}$$

entonces:

$$TD = \frac{r^2}{T'D} = \frac{(1-s^2)\sqrt{s^2+1}}{s}$$

por lo que:

$$TA = DA - TD = s - \frac{(1-s^2)\sqrt{s^2+1}}{s}$$

y como:

$$PT = \frac{r^2 r}{|QD^2 - r^2|} = \frac{r^3}{T'D^2} = \frac{\left(\frac{1-s^2}{\sqrt{s^2+1}}\right)^3}{\frac{(1-s^2)^2}{s^2(s^2+1)}} = \frac{s^2(1-s^2)}{\sqrt{s^2+1}}$$

TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 883

al ser los vectores unitarios en las direcciones y sentidos $\overrightarrow{AT}$ y $\overrightarrow{TP}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\left| \left(\frac{2s^2}{s^2+1}, \frac{2s}{s^2+1} - s \right) \right|} \left(\frac{2s^2}{s^2+1}, \frac{2s}{s^2+1} - s \right) = \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{1-s^2}{s^2+1} \right) \\ \frac{1}{\left| \left(\frac{2s}{s^2+1} - s, -\frac{2s^2}{s^2+1} \right) \right|} \left(\frac{2s}{s^2+1} - s, -\frac{2s^2}{s^2+1} \right) = \left(\frac{1-s^2}{s^2+1}, -\frac{2s}{s^2+1} \right) \end{array} \right.$$

resulta que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP} \\ &= \left[s - \frac{(1-s^2)\sqrt{s^2+1}}{s} \right] \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{1-s^2}{s^2+1} \right) + \frac{s^2(1-s^2)}{\sqrt{s^2+1}} \left(\frac{1-s^2}{s^2+1}, -\frac{2s}{s^2+1} \right) \\ &= \left(\frac{s^2(2\sqrt{s^2+1} + s^4 - 1)}{(s^2+1)\sqrt{s^2+1}}, \frac{s(s^2-1)(\sqrt{s^2+1} - 1)}{(s^2+1)\sqrt{s^2+1}} \right) \end{aligned}$$

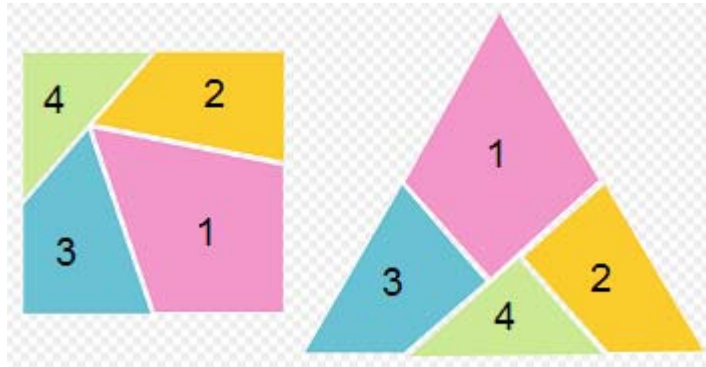
y, por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico pedido son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = \frac{s^2(2\sqrt{s^2+1} + s^4 - 1)}{(s^2+1)\sqrt{s^2+1}} \\ y(s) = \frac{s(s^2-1)(\sqrt{s^2+1} - 1)}{(s^2+1)\sqrt{s^2+1}} \end{array} \right. \quad (0 < s < +\infty)$$

TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 883

(Fondanaiche, P. (2018), a partir de un Sabiendo que el lado del triángulo tiene longitud unidad y que ambas figuras tienen la misma superficie, calcular las dimensiones de cada una de las piezas del siguiente puzzle de Haberdasher:



(Triángulos Cabri nº 882)

Solución:

Para simplificar los cálculos, vamos a suponer que:

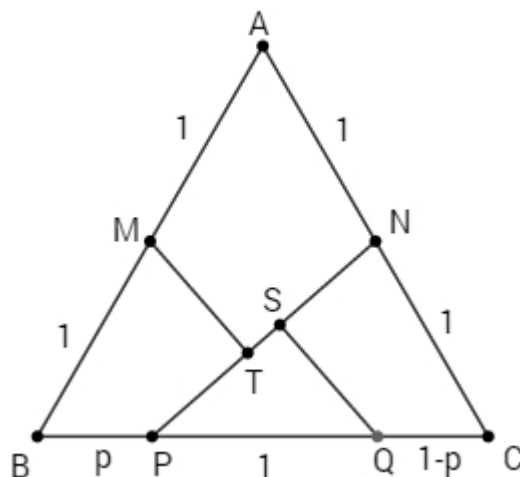
$$l_{\text{triángulo}} = 2 \underset{\text{Conway}}{\Rightarrow} S_A = S_B = S_C = 2$$

por lo que:

$$\Delta = \sqrt{3} \Rightarrow l_{\text{cuadrado}} = \sqrt[4]{3}$$

Además, en las figuras se observa que:

$$\begin{cases} AN = NC = 1 \\ AM = MB = 1 \end{cases} \quad BP + QC = PQ = 1$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega
Junio 2018