

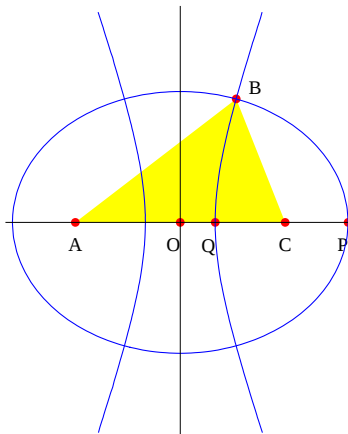
---

## Prob. Barroso-Sevilla

### ■ Enunciado

Dado un triángulo ABC, incentro I, circuncentro O, inradio r y circunradio R, demostrar que se cumple  $IA \cdot IB \cdot IC = 4r^2 \cdot R$

### ■ Solución (EH-Tr)



Consideremos las cónicas de focos  $A = (-1,0)$  y  $C = (1,0)$ . Las elipses de semieje horizontal  $e$  tienen como ecuación  $\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - 1} = 1$  y las hipérbolas de semieje horizontal  $h$ ,  $\frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{1 - h^2} = 1$ , donde  $OP = e$  y  $OQ = h$  y las excentricidades respectivas son  $\frac{1}{e}$  y  $\frac{1}{h}$ .

Dado un triángulo podemos tomar como vértices  $A$ ,  $C$  y otro punto  $B$  por el que pasan dos de las cónicas citadas (una de cada tipo). Este punto  $B$  tiene como coordenadas  $B(\pm eh, \pm \sqrt{(e^2 - 1)(1 - h^2)})$  (\*). Dependiendo de los signos cambia de cuadrante (basta situarlo en el  $1^\circ$ ).

Observamos que  $BC + BA = 2e$  y  $BC - BA = 2h$ . Combinando ambas expresiones se deduce que  $BC = e - h$  y  $BA = e + h$ . Así que los lados del triángulo miden  $a = e - h$ ,  $b = 2$ ,  $c = e + h$ .

Llamando  $s$  al semiperímetro obtenemos  $s = e + 1$ ,  $s - a = 1 + h$ ,  $s - b = e - 1$  y  $s - c = 1 - h$ .

Una primera consecuencia. La ordenada de  $B$  nos da el área, es decir

$S = \sqrt{(e^2 - 1)(1 - h^2)} = \sqrt{(e + 1)(e - 1)(1 + h)(1 - h)}$ , que es la fórmula de Herón.

Calculamos los círculos inscrito y circunscrito:

$$I(h, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}) = (h, \frac{s}{1+e}), r = \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e} = \frac{s}{1+e};$$

$$O(0, \frac{-2+e^2+h^2}{2\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}), R = \frac{(e-h)(e+h)}{2\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}} = \frac{abc}{4S}.$$

Pasamos al problema. Calculamos IA

$$IA = \sqrt{\frac{2(1+h)(e+h)}{1+e}} = \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}}. \text{ Obtenemos resultados análogos para IB e IC.}$$

$$\text{Así que } IA \cdot IB \cdot IC = \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} \sqrt{\frac{a(s-b)c}{s}} \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} = \frac{abc}{s} \cdot \frac{S}{s} = \frac{4srRs}{s^2} = 4r^2R$$

Esta relación puede extenderse a los otros incentros.

Tendríamos  $I_P A \cdot I_P B \cdot I_P C = 4r_P^2 R$ , donde P es cualquiera de los vértices.

$$\text{Por ejemplo } I_A A = \sqrt{\frac{sbc}{s-a}}. \text{ Operando de forma semejante}$$

$$I_A A \cdot I_A B \cdot I_A C = \sqrt{\frac{sbc}{s-a}} \sqrt{\frac{a(s-b)c}{s-a}} \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s-a}} = \frac{abc}{s-a} \cdot \frac{S}{s-a} = \frac{4sr_A R r_A s}{s^2} = 4r_A^2 R$$

Vamos a deducir otra relación entre R y r.

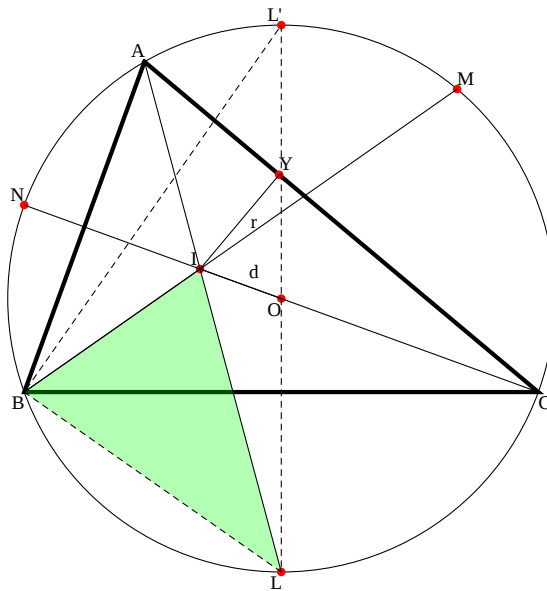
Sabemos que  $LI \cdot IA = MI \cdot IB = NI \cdot IC = 2Rr \Rightarrow LI \cdot IA \cdot MI \cdot IB \cdot NI \cdot IC = 8R^3 r^3$

y dado que (\*\*)  $LI = LB = 2R \sin \frac{A}{2}$  (dibujo),  $MI = 2R \sin \frac{B}{2}$ ,  $NI = 2R \sin \frac{C}{2}$ , tenemos que

$$IA \cdot IB \cdot IC = \frac{8R^3 r^3}{LI \cdot MI \cdot NI} = \frac{8R^3 r^3}{2R \sin \frac{A}{2} \cdot 2R \sin \frac{B}{2} \cdot 2R \sin \frac{C}{2}} = \frac{r^3}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}.$$

Como  $IA \cdot IB \cdot IC = 4Rr^2$ , deducimos que  $r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ .

Para los  $I_A$  tendríamos  $r_A = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{\pi-B}{2} \cdot \sin \frac{\pi-C}{2}$  y análogamente para los otros.



(\*) Omito cálculos. Se pueden ver en el problema 689, el primero que te propuse, creo.

(\*\*) El triángulo LIB es isósceles ("Retorno a la geometría", pg.29. Coxeter y Greitzer)