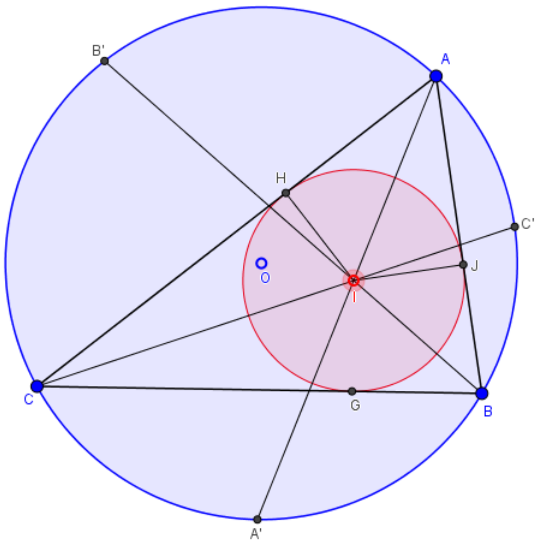
Problema 884.-
Demostrar que el producto de las distancias del incentro de un triángulo a los tres vértices del mismo es $4Rr^2$. Establecer y demostrar fórmulas análogas para los exincentros.

Altshiller-Court, N.(2007)
College GeometryAn Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle (p. 121).

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

En el triángulo rectángulo AHI, podemos considerar $\sin\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{r}{AI}\rightarrow AI=\frac{r}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$.



Observamos que para nuestro propósito, interesa expresar la razón $\sin\left(\frac{A}{2}\right)$ en términos de

$\sin A=\frac{a}{2R}\ y\ tag\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{r}{p-a}$,

como ahora veremos con mayor detalle.

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right)=tag\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{A}{2}\right)=$$
$$\frac{2\sin\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{A}{2}\right).tag\left(\frac{A}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin A.\ tag\left(\frac{A}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{A}{2}\right)}\rightarrow$$
$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\sin A.\ tag\left(\frac{A}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}.\frac{a}{2R}.\frac{r}{p-a}$$

En definitiva, $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{a\,r}{4R\,(p-a)}$.

Por tanto,

$$AI^2=\frac{r^2}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{4R\,r(p-a)}{a}\rightarrow AI^2=\frac{4R\,r(p-a)}{a}.$$

De forma análoga,

$$BI^2=\frac{4R\,r(p-b)}{b},CI^2=\frac{4R\,r(p-c)}{c}.$$

Su producto será entonces:

$$AI^2\cdot BI^2\cdot CI^2=\frac{4R\,r(p-a)}{a}\frac{4R\,r(p-b)}{b}\frac{4R\,r(p-c)}{c}$$

Teniendo en cuenta que:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$$

$$AI^2\cdot BI^2\cdot CI^2=\frac{64R^3r^3}{p}\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{64R^3r^3}{p}\frac{S^2}{4pRr}=\frac{64R^3r^3}{p}\frac{p^2r^2}{4pRr}\rightarrow$$

$$AI^2 \cdot BI^2 \cdot CI^2 = 16R^2r^4 \rightarrow \boldsymbol{AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2}, \quad cqd.$$