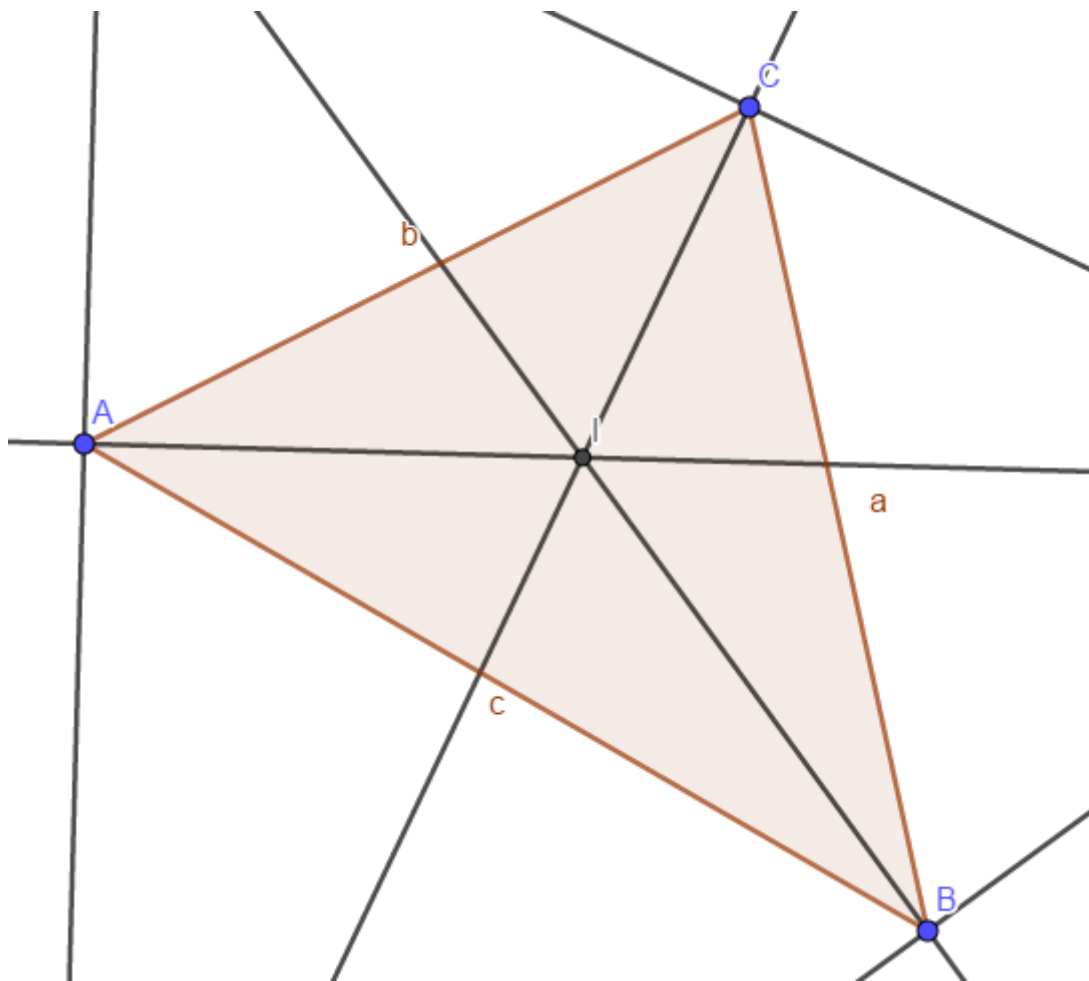


Show that the product of the distances of the incenter of a triangle from the three vertices of the triangle is equal to $4Rr^2$. State and prove analogous formulas for the excenters.

Nathan Altshiller-Court (2007) College Geometry An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle (p. 121). Prob 84

Apliquemos al triángulo AIB la fórmula del seno:



$$\frac{AI}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{BI}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AB}{\sin(\angle AIB)}$$

$$\text{Es } \angle AIB = 90^\circ + \left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\text{Por lo que } \sin(\angle AIB) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\text{Así es } AI = \frac{c \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}, BI = \frac{c \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Por analogía, tenemos

$$AI = \frac{b \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2} \right)}, CI = \frac{b \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2} \right)}$$

$$BI = \frac{a \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)}, CI = \frac{a \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

Así es:

$$(AI \cdot BI \cdot CI)^2 = (a \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right))^2 (b \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right))^2 (c \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right))^2$$

Estudiemos $\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

Si trazamos r, sea T el punto de tangencia con el lado c.

En el triángulo rectángulo en T AIT tenemos, siendo p el semiperímetro,

$$IT=r, AT=p-a, \text{ con lo que } \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{r}{(p-a)}$$

Así, es

$$(AI \cdot BI \cdot CI)^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{r^6}{[(p-a)(p-b)(p-c)]^2}$$

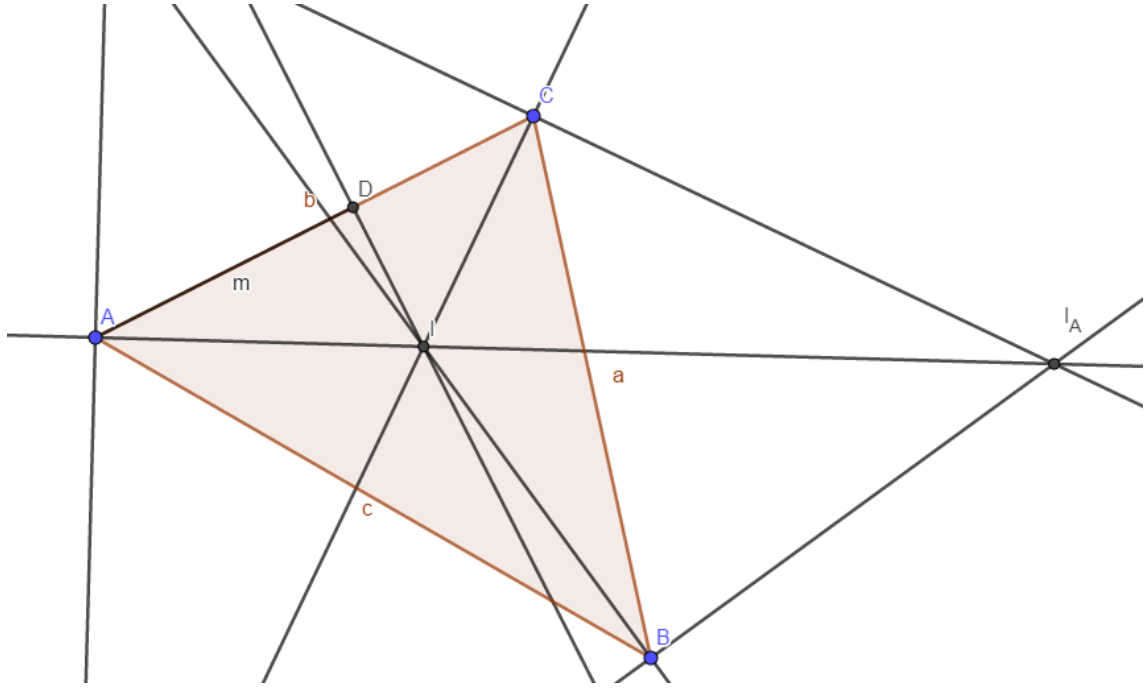
O

$$(AI \cdot BI \cdot CI) = ab \cdot c \frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Por Herón, y la fórmulas del área con R y r, dado que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$, se tiene lo pedido

$$AI \cdot BI \cdot CI = 4 R r^2$$

En el caso planteado de los excentros,



Tenemos en el triángulo $I_A CA$, $\angle I_A AC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle I_A CA = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$, $\angle AI_A C = \frac{\beta}{2}$

$$\frac{I_A A}{\operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{I_A C}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

De donde $I_A A = \frac{b \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}$, $I_A C = \frac{b \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}$

En el triángulo $I_A AB$, tenemos

$$\frac{I_A A}{\operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{I_A B}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

De donde

$$I_A A = \frac{c \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}, I_A B = \frac{c \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

En el triángulo $I_A BC$, $\angle CI_A B = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle I_A CB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, $\angle I_A BC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$

Por lo que

$$\frac{I_A C}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{I_A B}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Luego $I_A C = \frac{a \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, $I_A B = \frac{a \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Así es :

$$(I_A A I_A B I_A C)^2 = (a b c \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{\gamma}{2} \right))^2$$

O bien

$$I_A A I_A B I_A C = a b c \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{\gamma}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{r}{(p-a)}, \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{p-b}{r}, \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \frac{p-c}{r},$$

Así, es

Por Herón, y la fórmulas del área con R y r, dado que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$, se tiene

$$I_A A I_A B I_A C = \frac{(p-a)^2}{p^2} 4r^2 R.$$