

TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 884

(Altshiller-Court, N. (2007) College Geometry An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle).

- ① Dado un triángulo ABC con incentro I , probar que:

$$AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$$

- ② Establecer y demostrar fórmulas análogas para los excentros.

Solución:

- ① Considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , resulta que:

$$I = (a : b : c) = \left(\frac{a}{a+b+c} : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c} \right)$$

por lo que:

$$\begin{cases} AI^2 = \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{a}{a+b+c} - 1 \right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^2 = \frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c} \\ BI^2 = \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{b}{a+b+c} - 1 \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^2 = \frac{ac(a-b+c)}{a+b+c} \\ CI^2 = \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b+c} - 1 \right)^2 = \frac{ab(a+b-c)}{a+b+c} \end{cases}$$

luego:

$$\begin{aligned} (AI \cdot BI \cdot CI)^2 &= \left[\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c} \right] \left[\frac{ac(a-b+c)}{a+b+c} \right] \left[\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c} \right] \\ &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(abc)^2}{(a+b+c)^3} \\ &= \frac{4S^2(abc)^2}{(a+b+c)^4} \\ &= \frac{4S^2(abc)^2}{(2s)^4} \\ &= 16 \left(\frac{abc}{2S} \right)^2 \left(\frac{S}{2s} \right)^4 \\ &= 16R^2r^4 \\ &= (4Rr^2)^2 \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$$

TRIÁNGULOS CABRI

PROBLEMA 884

② Vamos a probar que, si I_a , I_b e I_c son los excentros del triángulo ABC , entonces:

$$\begin{cases} AI_a \cdot BI_a \cdot CI_a = 4Rr_a^2 \\ AI_b \cdot BI_b \cdot CI_b = 4Rr_b^2 \\ AI_c \cdot BI_c \cdot CI_c = 4Rr_c^2 \end{cases}$$

aunque lo haremos únicamente para I_a , ya que, en los otros dos casos, la demostración sería prácticamente idéntica. Como:

$$I = (-a : b : c) = \left(-\frac{a}{-a+b+c} : \frac{b}{-a+b+c} : \frac{c}{-a+b+c} \right)$$

entonces:

$$\begin{cases} AI^2 = \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2} \right) \left(-\frac{a}{-a+b+c} - 1 \right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{b}{-a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right) \left(\frac{c}{-a+b+c} \right)^2 = \frac{bc(a+b+c)}{-a+b+c} \\ BI^2 = \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2} \right) \left(-\frac{a}{-a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{b}{-a+b+c} - 1 \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right) \left(\frac{c}{-a+b+c} \right)^2 = \frac{ac(a+b-c)}{-a+b+c} \\ CI^2 = \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2} \right) \left(-\frac{a}{-a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2} \right) \left(\frac{b}{-a+b+c} \right)^2 + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right) \left(\frac{c}{-a+b+c} - 1 \right)^2 = \frac{ab(a-b+c)}{-a+b+c} \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} (AI \cdot BI \cdot CI)^2 &= \left[\frac{bc(a+b+c)}{-a+b+c} \right] \left[\frac{ac(a-b+c)}{-a+b+c} \right] \left[\frac{ab(a+b-c)}{-a+b+c} \right] \\ &= \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(abc)^2}{(-a+b+c)^3} \\ &= \frac{4S^2(abc)^2}{(-a+b+c)^4} \\ &= 16 \left(\frac{abc}{2S} \right)^2 \left(\frac{S}{-a+b+c} \right)^4 \\ &= 16R^2r_a^4 \\ &= (4Rr_a^2)^2 \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$AI_a \cdot BI_a \cdot CI_a = 4Rr_a^2$$