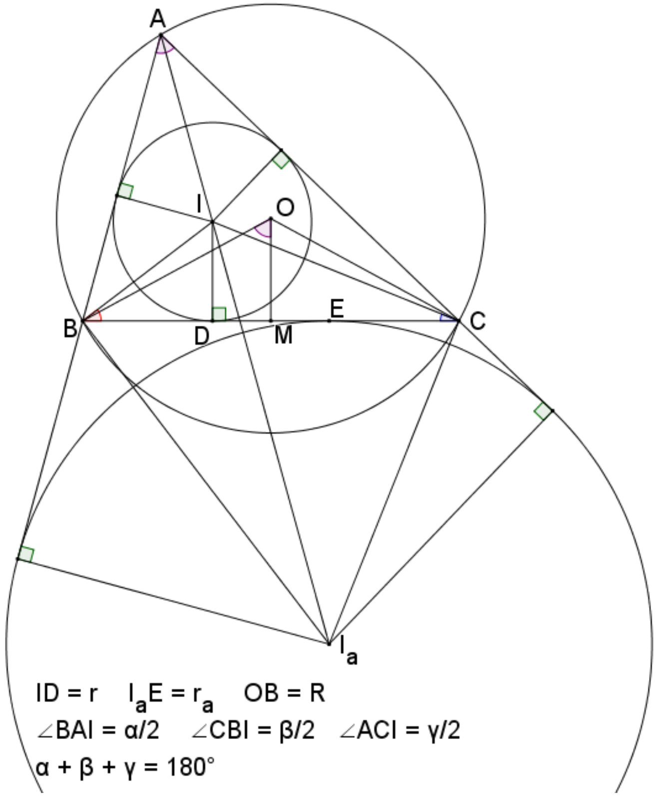
Problema n° 884
Problema 84.- Demostrar que el producto de las distancias del incentro de un triángulo a los tres vértices del mismo es $4Rr^2$. Establecer y demostrar fórmulas análogas para los excentros.
Altshiller-Court, N.(2007) College GeometryAn Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle (p. 121).

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soient O, I et I_a les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrit du secteur en A dans le triangle ABC. D et E sont les points de contact du cercle inscrit et du cercle exinscrit avec BC. M est le milieu de BC.

Avec les notations de la figure ci-contre, on a les relations:
$IA = r/\sin(\alpha/2)$, $IB = r/\sin(\beta/2)$, $IC = r/\sin(\gamma/2)$.
$BC = BD + DC = r(\cot(\beta/2) + \cot(\gamma/2)) = 2BM = 2R\sin(\alpha)$.

D'où $r = 4R\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)/[\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2) + \sin(\beta/2)\cos(\gamma/2)]$

Or $\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2) + \sin(\beta/2)\cos(\gamma/2) = \sin[(\beta + \gamma)/2] = \cos(\alpha/2)$

On en déduit $r = 4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)$, soit $r/\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) = 4R$

Il en résulte que $IA.IB.IC = r^3/[\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)] = r^2.r/\sin(\alpha/2)\sin(\beta2)\sin(\gamma/2) = 4Rr^2$

Donc **$IA.IB.IC = 4Rr^2$** C.q.f.d.

Avec le cercle exinscrit du secteur en A, on a la relation **$I_aA.\ I_aB.\ I_aC = 4Rr_a^2$**
Elle s'obtient avec les équations précédentes dans lesquelles $\sin(\beta/2)$ est tout simplement remplacé par $\cos(\beta/2)$, $\cos(\beta/2)$ par $\sin(\beta/2)$, $\sin(\gamma/2)$ par $\cos(\gamma/2)$, $\cos(\gamma/2)$ par $\sin(\gamma/2)$.