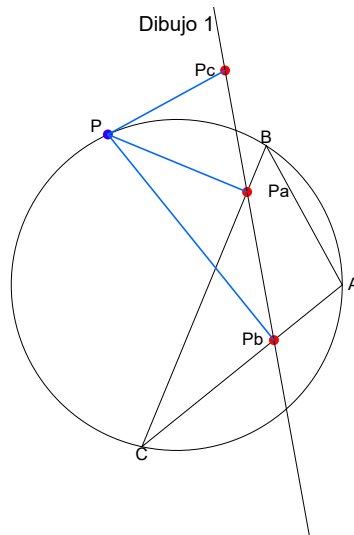


La deltoide de Steiner

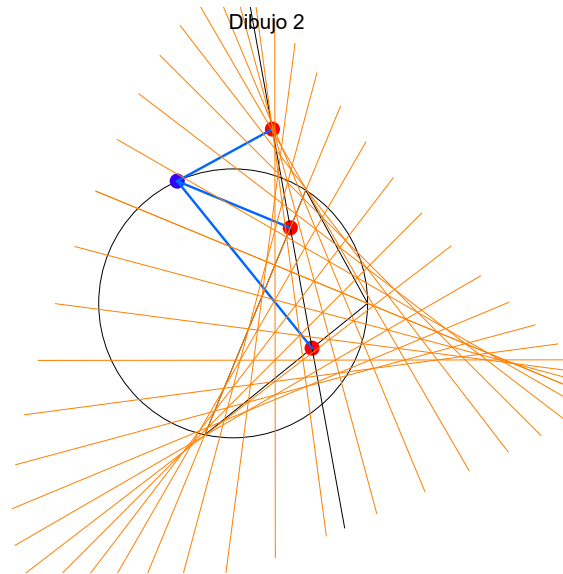
por César Beade Franco

Dado un triángulo ABC y un punto cualquiera P situado en su circunferencia circunscrita. El teorema de W-S afirma que los pies de las perpendiculares Pa , Pb , Pc trazadas desde P a cada lado (o su prolongación) están alineados. Se encuentran sobre la llamada recta de W-S.



Al anterior se le conoce como teorema de Simson (1) y a la recta protagonista, recta de Simson, o a veces recta de Simson-Wallace, pues fue Wallace (2) su verdadero descubridor. Aquí la llamaremos recta S-W. Hay diversas demostraciones y más adelante mostraré una analítica (3).

Ya en el siglo XIX Steiner se preguntó por la envolvente de estas rectas cuando el punto P recorre la circunferencia circunscrita. Y en un artículo, bastante oscuro, publicado en 1856 demostró que tal lugar era una deltoide. Miguel de Guzmán consiguió mediante una transformación geométrica de su invención dar una demostración no solo más simple sino gráficamente más intuitiva de esta sorprendente propiedad de las rectas S-W.



Como vamos a hacer uso generoso de cálculos es preciso clarificar un poco la situación. Para empezar trabajaremos con triángulos inscritos en la "circunferencia unidad", ω , de centro $O = (0,0)$ y radio 1, y cuyos puntos en función de un parámetro α toman la forma $P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Al valor $\alpha = 0$ le corresponde el punto $(1,0)$, y P recorre la circunferencia en sentido antihorario al variar α de 0 a 2π . Tres valores de α determinan los vértices de un triángulo que tiene a ω como circunferencia circunscrita. Por ejemplo el triángulo $T(a,b,c)$ tiene como vértices los puntos $P(a)$, $P(b)$ y $P(c)$. Si tomamos triángulo $T(a,b,c)$ y un punto $P(\alpha)$ los puntos P_a , P_b , P_c del dibujo 1 resultan ser (4)

$$P_a = \left(\frac{1}{2}(\cos b + \cos c - \cos(b+c-\alpha) + \cos \alpha), \frac{1}{2}(\sin b + \sin c - \sin(b+c-\alpha) + \sin \alpha) \right)$$

$$P_b = \left(\frac{1}{2}(\cos c + \cos a - \cos(c+a-\alpha) + \cos \alpha), \frac{1}{2}(\sin c + \sin a - \sin(c+a-\alpha) + \sin \alpha) \right)$$

$$P_c = \left(\frac{1}{2}(\cos a + \cos b - \cos(a+b-\alpha) + \cos \alpha), \frac{1}{2}(\sin a + \sin b - \sin(a+b-\alpha) + \sin \alpha) \right)$$

Ahora basta comprobar que $\text{Det}[P_a - P_b, P_a - P_c] = 0$, lo que efectivamente sucede.

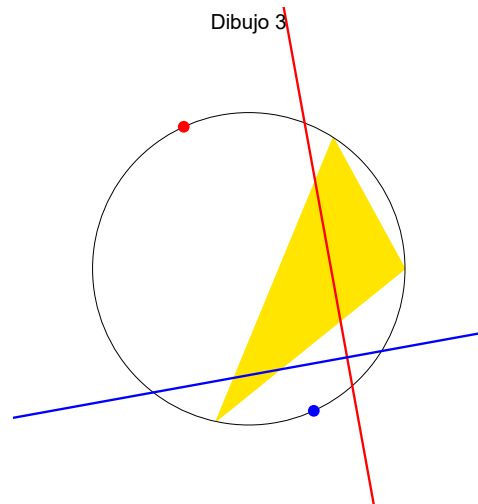
Como conocemos 3 puntos de la recta S-W podemos obtener su dirección con lo que queda determinada. Para las condiciones anteriores su dirección es

$$d(\alpha) = (\cos a - \cos b - \cos(a+c-\alpha) + \cos(b+c-\alpha), \sin a - \sin b - \sin(a+c-\alpha) + \sin(b+c-\alpha)).$$

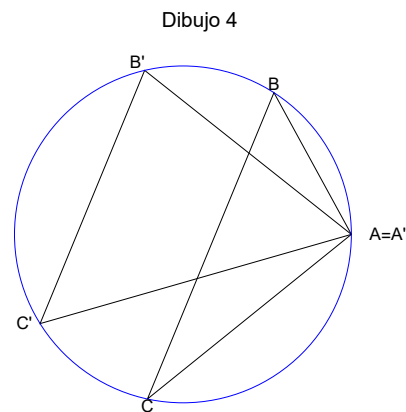
Y si en vez de $P(\alpha)$, tomamos su punto diametralmente opuesto $Q(\pi+\alpha)$ obtenemos

$$d(\pi+\alpha) = (\cos a - \cos b + \cos(a+c-\alpha) - \cos(b+c-\alpha), \sin a - \sin b + \sin(a+c-\alpha) - \sin(b+c-\alpha)).$$

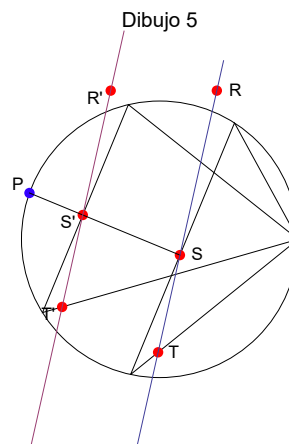
Se comprueba que el producto escalar $d(\alpha) \cdot d(\pi+\alpha) = 0$, lo que significa que puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita tienen rectas S-W perpendiculares.



Volvemos a la misteriosa envolvente que claramente parece tener la forma de una deltoide. Miguel de Guzmán (5) se preguntó si existía algún argumento gráfico que aclarara esta propiedad. Y si lo hay. Para ello hizo uso de la siguiente transformación- que denotaré por TfG- de su invención, relativa a triángulos inscritos en una circunferencia.



Según vemos un vértice se deja fijo y el lado opuesto se desplaza paralelamente. Es decir el triángulo $T(a,b,c)$ se transforma en $T(a,b+k,b-k)$. En el dibujo el arco BB' mide k y el CC' , $-k$. Y el siguiente dibujo aparece la causa de la importancia de esta transformación: la recta de Simson mantiene una dirección determinada.

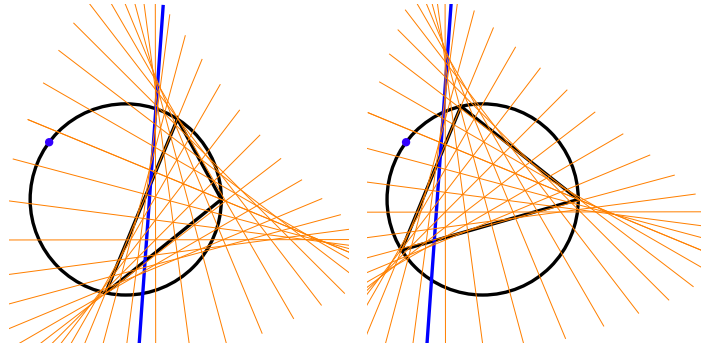


El vector traslación es el mismo para los lados del triángulo afectados que para la recta W-S. Las rectas S-W se desplazan según el vector SS' perpendicular a los lados parale-

los de los triángulos. La demostración de esta propiedad se completa demostrando que los vectores RT y $R'T'$ son efectivamente paralelos (6).

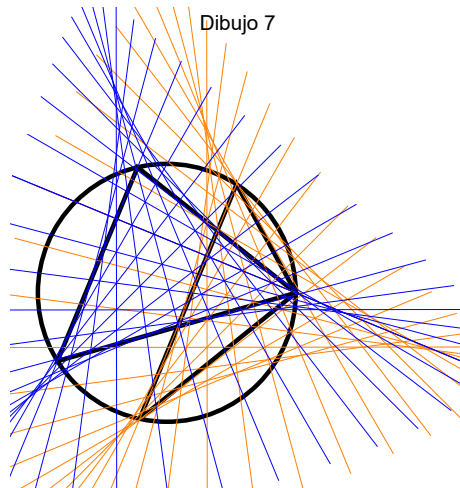
La consecuencia es que las envolventes de las rectas $W-S$ son las mismas, desplazadas según la traslación anterior.

Dibujo 6



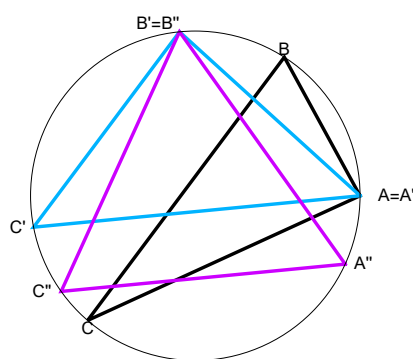
Aquí se aprecia mejor.

Dibujo 7



El hecho notable es que todo triángulo puede transformarse en otro equilátero aplicándole dos TfG sucesivas.

Dibujo 8

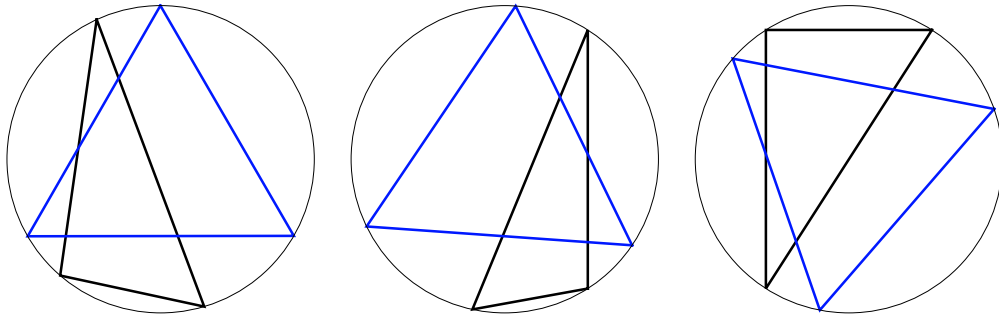


Una primera transformación deja fijo A y cambia los otros vértices de modo que $A'B' = B'C'$. Esto se consigue con un desplazamiento tal que $BB' = C'C = \frac{a-2b+c}{3}$. A continuación ejecutamos la segunda transformación dejando fijo B' y de forma que el ángulo $A''B''C''$ mida 60° , lo que se consigue haciendo que $C'C'' = A''A' = \frac{2a-b-c+2\pi}{3}$. El trián-

gulo ABC del dibujo 7 es $T(0,1,4)$. La primera transformación lo cambia en $T(0, \frac{5}{3}, \frac{10}{3})$ y la segunda en $T(\frac{1}{3}(5-2\pi), \frac{5}{3}, \frac{1}{3}(5+2\pi))$ que es equilátero.

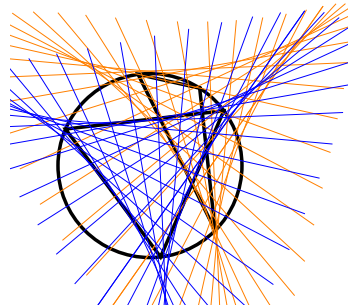
A continuación vemos varios triángulos y el equilátero en que se transforman.

Dibujo 9



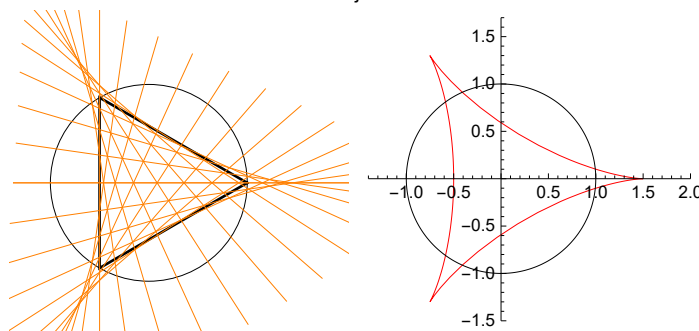
Y como vemos, la envolvente de un triángulo coincide con la de otro equilátero, salvo la posición.

Dibujo 10



Así que llegó el momento de obtener la ecuación de esta curva. Ni que decir que usaremos el triángulo $T(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ y contaremos con el cálculo diferencial que nos proporciona un método efectivo. ¿Tendrán la misma ecuación la envolvente de la izquierda y la epicloide de la derecha, tal como parece?

Dibujo 11



La recta S-W de $T(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ para un punto $P(a)$ viene dada por la ecuación paramétrica

$$(x(t), y(t)) =$$

$$\left(\frac{1}{4}(-2 + 3t + 3t \cos a + \sqrt{3} t \sin a), \frac{1}{4}(-\sqrt{3} t + \sqrt{3} t \cos a + (4 - 3t) \sin a) \right)$$

Si eliminamos el parámetro t obtenemos la ecuación implícita de la familia

$$2y \cos \frac{a}{2} + (-1 + 2x - 2 \cos a) \sin \frac{a}{2} = 0 \quad (*)$$

A cada valor de a obtenemos una recta de dicha familia. Para calcular su envolvente

hemos de derivar (*) respecto al parámetro y resolver para x e y el sistema formado por ambas ecuaciones, lo que nos proporcionará su ecuación paramétrica.

$$\partial_a \left(2y \cos \frac{a}{2} + (-1 + 2x - 2 \cos a) \sin \frac{a}{2} \right) = 0 \Rightarrow x \cos \frac{a}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{3a}{2} - y \sin \frac{a}{2} = 0$$

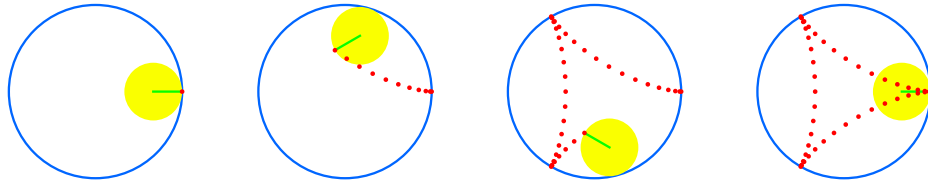
(**)

Resolviendo para x e y el sistema formado por (*) y (**) obtenemos la ecuación paramétrica

$$(x,y) = \left(\cos a + \frac{1}{2} \cos 2a, \sin a - \frac{1}{2} \sin 2a \right) (***)$$

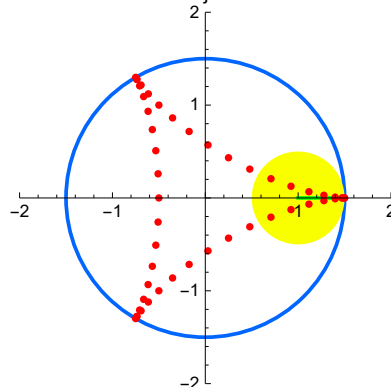
Y ahora descansemos de cálculos. Observemos los siguientes dibujos.

Dibujo 12



Acabamos de observar la generación de una deltoide o hipocicloide tricúspide como se le llama pomposamente a veces. Esta curva pertenece a una extensa familia de curvas que podemos llamar genéricamente cíclicas y de las que la cicloide es el ejemplo más conocido. Se caracterizan por ser generadas por la rotación de una circunferencia. Ahora vamos a observar con más detalle el último fotograma.

Dibujo 13



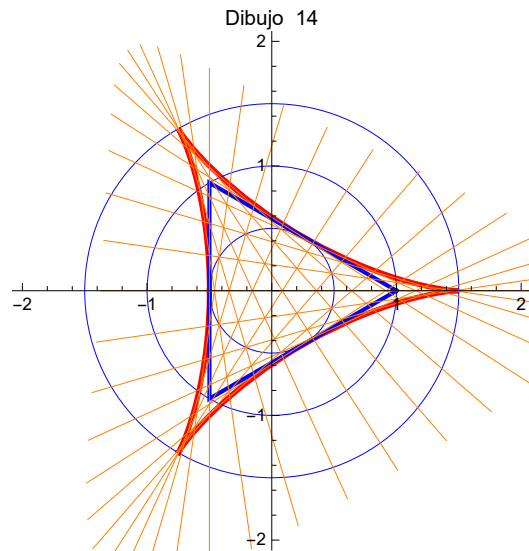
Se trata de la curva del dibujo 10. La genera un punto de una circunferencia cuando rota por el interior de otra mayor. La razón entre los radios de ambas es $\frac{a}{b} = 3$, siendo $a = \frac{3}{2}$ el radio de la de apoyo y $b = \frac{1}{2}$ el de la que rueda. La posición inicial del punto generador es $(\frac{3}{2}, 0)$ y dista $h = \frac{1}{2}$ del centro de la rodante. El análisis nos dice que la ecuación paramétrica de las epicicloides es

$$(x,y) = ((a - b) \cos t + h \cos ((a - b)/b)t, (a - b) \sin t - h \sin ((a - b)/b)t)$$

En el caso que nos ocupa la ecuación resulta ser justamente (***)

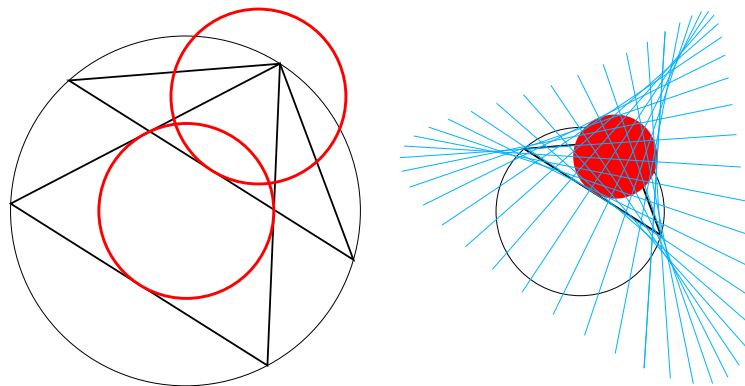
$$(x,y) = \left(\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t, \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

El próximo dibujo ya no necesita comentarios.



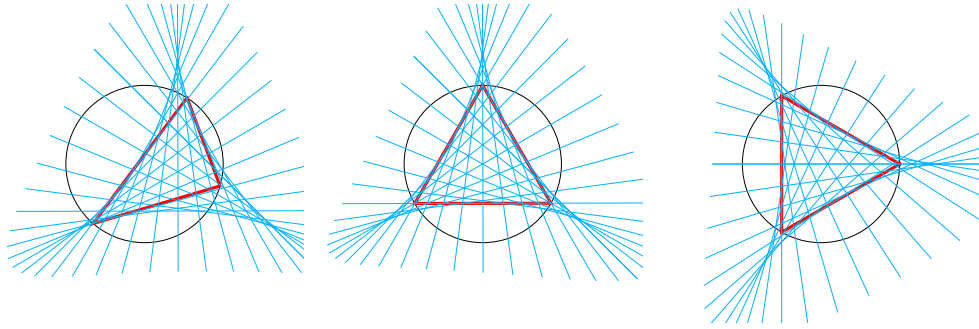
Vemos un círculo tangente a la deltoide que lo seguirá siendo cuando apliquemos al triángulo la TfG. Su radio es la mitad que la del circuncírculo y todas las sospechas recaen sobre el círculo de los 9 puntos (7). Su radio es $\frac{R}{2}$. Y el dibujo 15 nos las confirma al comprobar que sufre las mismas consecuencias por la TfG que la envolvente. Y por supuesto que por los vértices de la deltoide pasa una paralela a C9P de radio triple.

Dibujo 15



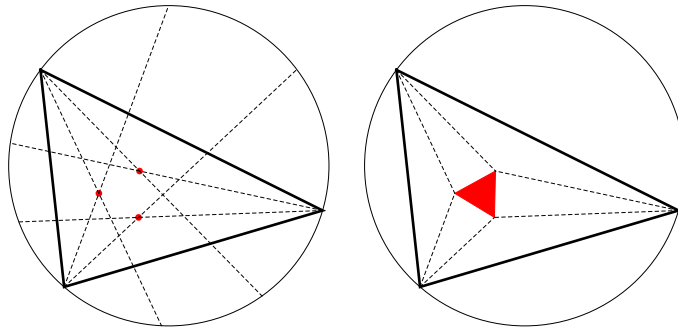
Incluso estamos en condiciones de conocer las transformaciones que nos llevan de la deltoide "canónica" del dibujo 11 a una cualquiera, o viceversa. Podemos considerar un ejemplo concreto, como el triángulo $T(1,4,6)$. Su envolvente tiene como centro C, el de C9P. Se transforma en el equilátero $T(\frac{1}{3}(11 - 2\pi), \frac{11}{3}, \frac{1}{3}(11 + 2\pi))$, cuya C9P tiene centro el origen. Es decir, la traslación de vector $-C$ lleva la primera deltoide a la segunda. Ahora basta un giro que lleve el vértice más próximo de la segunda envolvente al punto $P(0) = (1,0)$. En este caso el giro sería $2\pi - \frac{1}{3}(11 + 2\pi) = \frac{1}{3}(-11 + 4\pi)$

Dibujo 16



Y no nos despediremos de la deltoide sin aludir, siquiera de pasada, a su misteriosa relación con el triángulo de Morley (8). En el dibujo 17 las líneas de puntos trisecan los ángulos interiores del triángulo. Cortándolas en un determinado orden determinan un triángulo que resulta ser siempre equilátero.

Dibujo 17



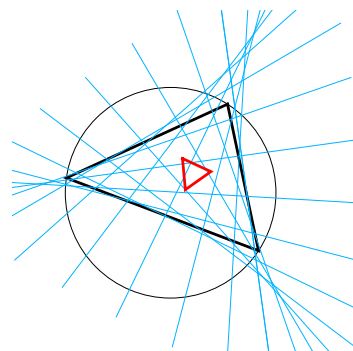
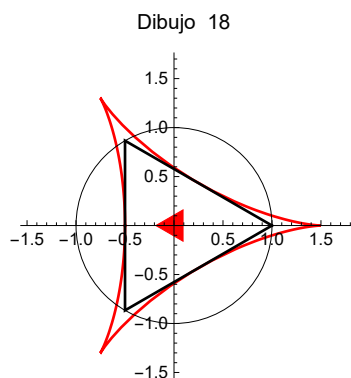
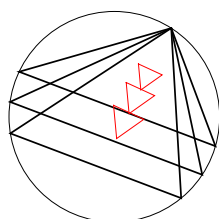
En la siguiente secuencia comprobamos con sorpresa que la TfG deja sus lados paralelos, y a continuación que el triángulo de Morley es paralelo a la deltoide pero su orientación es inversa. El fotograma central aclara la causa de esta orientación. Podemos hacer una comprobación analítica para este caso en que el triángulo es equilátero. Sus vértices son

$$m_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos\left[\frac{2\pi}{9}\right] + \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2 \sin\left[\frac{2\pi}{9}\right]}{\sqrt{3} + \sqrt{3} \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2 \sin\left[\frac{2\pi}{9}\right]}, \frac{3 \left(-1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{\pi}{9}\right]\right)}{2 \left(\sqrt{3} \left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right]\right) + \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2 \sin\left[\frac{2\pi}{9}\right]\right)} \right)$$

$$m_2 = \left(\frac{-\cos\left[\frac{\pi}{18}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{\pi}{18}\right]}{\sqrt{3} + 2 \cos\left[\frac{\pi}{18}\right]}, 0 \right)$$

$$m_3 = \left(-1 + \frac{2\sqrt{3} \left(\cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{9}\right]\right)}{\sqrt{3} \left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right]\right) + \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2 \sin\left[\frac{2\pi}{9}\right]}, -\frac{3 \left(-1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{\pi}{9}\right]\right)}{2 \left(\sqrt{3} \left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right]\right) + \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2 \sin\left[\frac{2\pi}{9}\right]\right)} \right)$$

La dirección $m_3 m_1$ es $m_1 - m_3 = \left(0, \frac{3 \left(-1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{\pi}{9}\right]\right)}{\sqrt{3} \left(1 + \cos\left[\frac{\pi}{9}\right]\right) + \sin\left[\frac{\pi}{9}\right] + 2 \sin\left[\frac{2\pi}{9}\right]} \right)$, es decir, vertical y paralela, por tanto, a uno de los arcos de la deltoide. Y por simetría, lo mismo sucede con los otros lados.



Sin embargo no son necesarios estos sofisticados argumentos gráficos para establecer la naturaleza de la envolvente y su relación con el C9P.

Calculemos la ecuación implícita de la recta de Simson para un punto $P(t)$ de la circunferencia circunscrita. Obtenemos la familia de rectas

$$f(t) = \text{Sen}\left[\frac{a-b}{2}\right] \text{Sen}\left[\frac{c-t}{2}\right] \\ \left(2 \text{ y } \text{Cos}\left[\frac{1}{2}(a+b+c-t)\right] + \text{Sen}\left[\frac{1}{2}(a+b+c-3t)\right] + \text{Sen}\left[\frac{1}{2}(a+b-c-t)\right] + \right. \\ \left. \text{Sen}\left[\frac{1}{2}(a-b+c-t)\right] - 2x \text{Sen}\left[\frac{1}{2}(a+b+c-t)\right] - \text{Sen}\left[\frac{1}{2}(a-b-c+t)\right] \right)$$

Derivando y resolviendo el sistema $f(t) = 0$ y $f'(t) = 0$ se obtiene la ecuación paramétrica de la envolvente que resulta ser

$$\left(\frac{1}{2}(\text{Cos}[a] + \text{Cos}[b] + \text{Cos}[c] + \text{Cos}[a+b+c-2t]) + \text{Cos}[t], \right. \\ \left.\frac{1}{2}(\text{Sen}[a] + \text{Sen}[b] + \text{Sen}[c] + \text{Sen}[a+b+c-2t]) + \text{Sen}[t]\right)$$

Tenemos la ecuación de una deltoide de centro $D = \left(\frac{1}{2}(\text{Cos}[a] + \text{Cos}[b] + \text{Cos}[c]), \text{Sen}[a] + \text{Sen}[b] + \text{Sen}[c]\right)$, generada al girar una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de otra centrada en D de radio $\frac{3}{2}$.

La C9P resulta tener el mismo centro D y radio $\frac{1}{2}$, de aquí lo observado en el dibujo 15.

Todavía vamos a encontrar esta deltoide de nuevo. Volvamos al dibujo 1. Dado un punto P de la circunferencia circunscrita, consideremos los puntos medios U , V y W de $PaPb$, $PbPc$ y $PcPa$ respectivamente y calculemos los lugares geométricos que describen al variar P . Este es el problema 735 de esta página. Su solución son 3 elipses tangentes precisamente a la Deltoide de Steiner.

Notas

- (1) Robert Simson, matemático escocés (1687-1768), fue el primero en traducir al inglés los "Elementos" de Euclides. En 1753 demuestra que el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci converge a Φ .
- (2) Willian Wallace, también matemático escocés (1768-1843).
- (3) Se puede encontrar una, usando el teorema de Menelao en [Pui]. También se puede consultar otra [Coh], donde se utiliza la conciclidad.
- (4) Para realizar estos cálculos he usado el programa "Mathematica".
- (5) Sus hallazgos los expone en [Guz]
- (6) Equivale a que $\text{Det}[RT, R'T'] = 0$. Comprobación que realicé con el programa anterior.

(7) Que llamaré C9P y que se le conoce a veces como círculo de Feuerbach.

(8) El teorema fue descubierto en 1899 por Frank Morley, quien lo mencionó a sus amigos sin llegar a demostrarlo, es decir,

lo dejó como conjetura. Ellos, a su vez, lo difundieron a modo de curiosidad matemática. Finalmente, tras diez años, se

publicaron dos demostraciones, una trigonométrica de M. Satyanarayana y otra de geometría elemental de M. T.

Naraniengar que sería redescubierta en 1922 por J. M. Child y se puede ver en [CoGr].

Bibliografía

[Coh] G. Cohen (dirigido por), *Le Triangle*, Editions POLE, Paris 2005.

[CoGr] Coxeter y Greitzer, *Retorno a la Geometría*. DLS-EULER, Editores, Madrid, 1993.

[Guz] M. de Guzmán, *La experiencia de descubrir en Geometría*. Nivola ediciones, Madrid, 2002.

[Pui] Puig Adam, *Geometría métrica (2 tomos)*. Euler editorial, Madrid, 1947.