1.-INVERSIÓN EN EL PLANO. MARCO TEÓRICO.

Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas, Córdoba (España).

En esta primera parte del documento iniciamos el estudio de la inversión destacando sus propiedades para su aplicación posterior en le Resolución de Problemas.

1.1.- Una transformación por inversión en el plano queda determinada por un punto O, llamado *polo de la inversión*, y un valor real $\lambda > 0$, denominado *módulo o potencia de la inversión.*

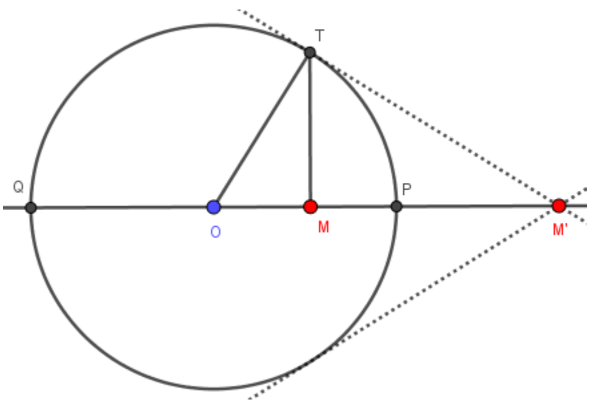
A todo punto M del plano la inversión le hace corresponder el punto M', situado sobre la recta OM y definido por la relación $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \lambda$.

Esta definición es recíproca, es decir, M' es el punto inverso de M y, asimismo M es el punto inverso de M'. Al ser $\lambda > 0$, los puntos M y M' están sobre la misma semirrecta OM.

Si consideramos la circunferencia de centro, el punto O y radio $\sqrt{\lambda}$, entonces M y M' son puntos conjugados respecto de ella, a la que podemos denominar como *la circunferencia de dicha inversión*.

En efecto, aplicando el Teorema del cateto al triángulo rectángulo OTM, tenemos que

$$OM \cdot OM' = OT^2 \to OM \cdot OM' = \lambda$$



Consideremos el segmento PQ y los dos puntos M y M'. Entonces, se dice que M y M' son conjugados armónicos respecto a PQ si satisfacen la siguiente igualdad en segmentos dirigidos:

$$\frac{QM}{MP} = -\frac{QM'}{M'P}.$$

Observamos que esta relación se deduce del hecho que M y M' son puntos inversos respecto de la circunferencia de inversión dada. En efecto, si $OM \cdot OM' = \lambda \to OM \cdot OM' = OQ^2; \frac{OQ}{OM} = \frac{OM'}{OQ} \to \frac{OQ+OM'}{OM+OQ} = \frac{OQ-OM'}{OM-OQ};$

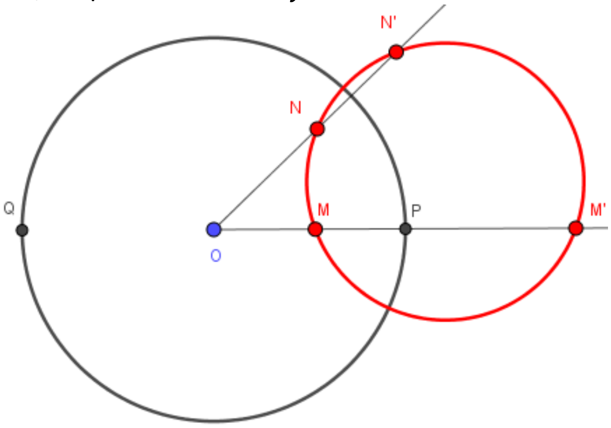
$\frac{M'Q}{MQ} = \frac{PM'}{MP} \to \frac{QM}{MP} = -\frac{QM'}{M'P}$. Por tanto, deducimos que los puntos M y M', inverso uno de otro, dividen interna y externamente al segmento QP, diámetro del círculo de inversión.

1.2.-Dos parejas de puntos inversos, no dispuestos en una misma recta, son concíclicos.

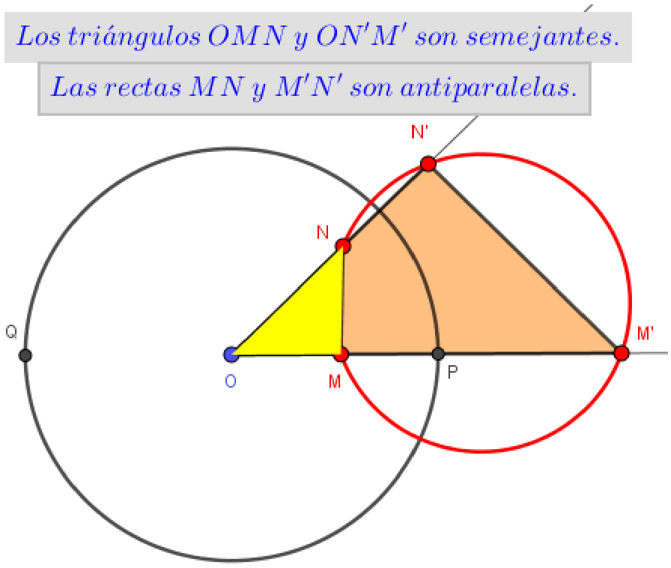
En efecto, basta considerar la circunferencia que pasa por los puntos $M, M'\ y\ N$. Como quiera que M y M' son puntos inversos, se tiene que

$OM \cdot OM' = \lambda$. Por otro lado, también $ON \cdot ON' = \lambda \to$ El punto N' deberá pertenecer también a aquella circunferencia.

Así, los puntos $M, M', N\ y\ N'$ son concíclicos.



De este hecho, resulta que:



Así, podemos además hallar el valor de $M'N'$ en función de los lados del triángulo OMN.
En efecto, es fácil deducir a partir de la semejanza entre los triángulos OMN y $ON'M'$,

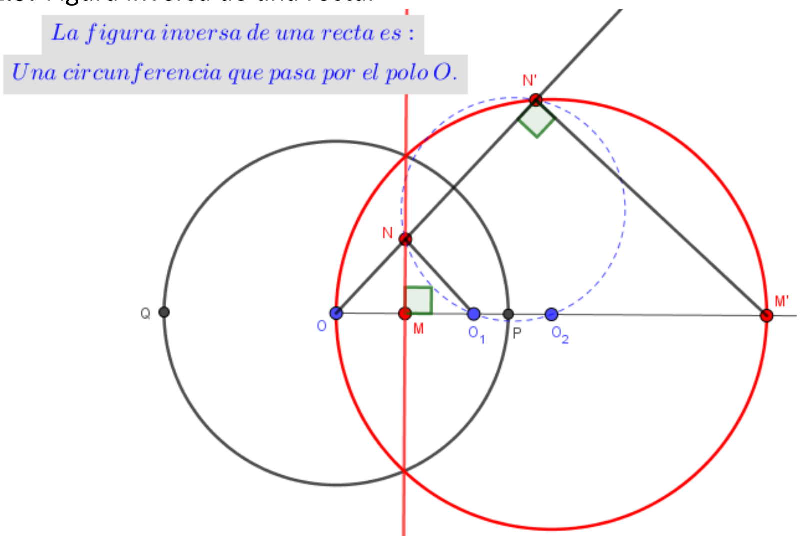
$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{ON} \rightarrow$$

$$M'N' = MN.\frac{OM'}{ON};$$

$$M'N' = MN.\frac{OM' \cdot OM}{ON \cdot OM};$$

$$\boldsymbol{M'N' = MN.\frac{\lambda}{ON \cdot OM}}.$$

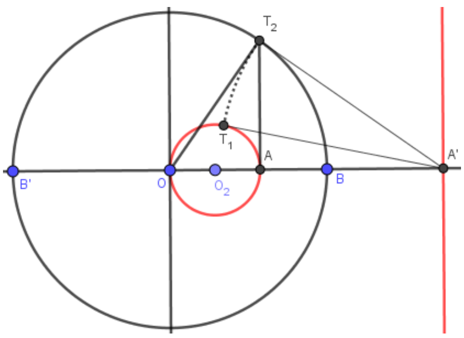
1.3.-Figura inversa de una recta.



Además el centro de dicha circunferencia O_2 es el punto inverso de O_1, punto simétrico del polo O, respecto de la recta MN. Este centro, O_2 es el punto medio del segmento OM'.

Así tenemos dos formas de construir esta circunferencia, la figura inversa de una recta.

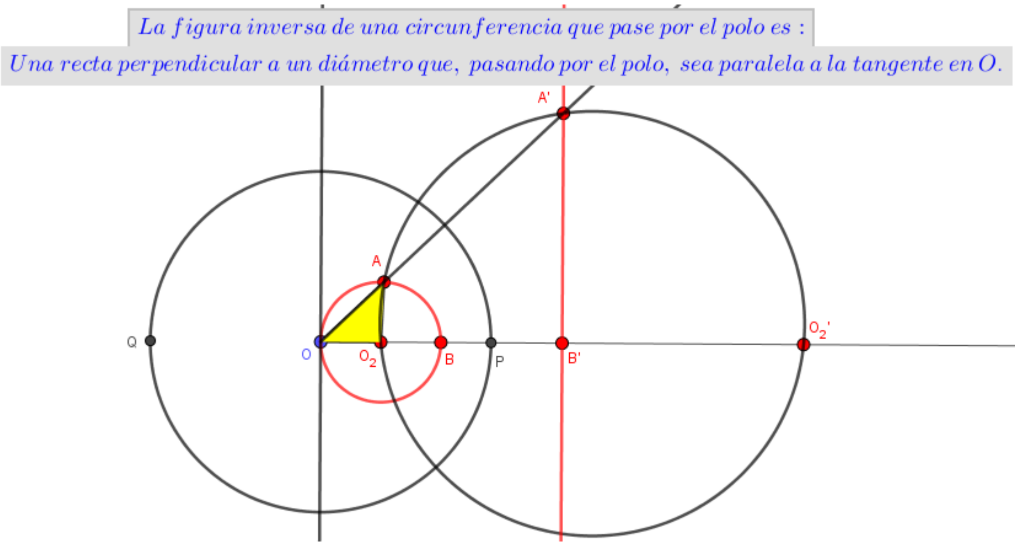
1.4.- Figura inversa de una circunferencia que pasa por el polo.
De forma similar, la Figura inversa de una circunferencia que pasa por el polo será una recta perpendicular a un diámetro de dicha circunferencia que pasando por el polo, sea paralela a la tangente a la misma por dicho punto. Verificamos el siguiente hecho de interés:



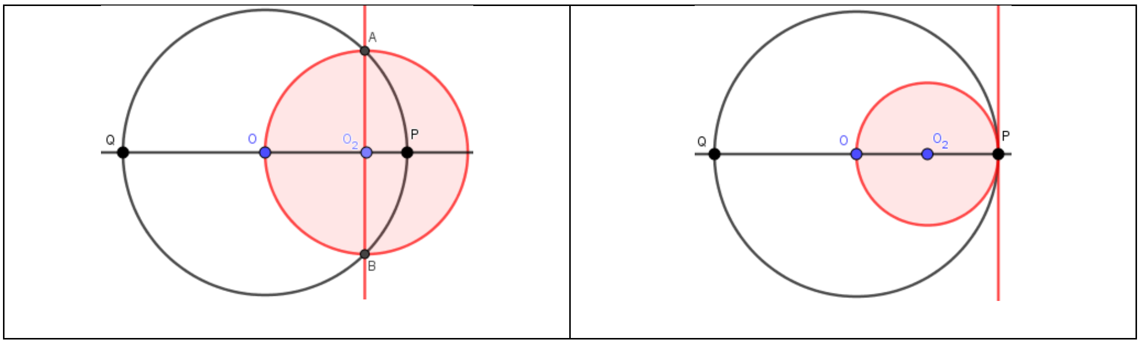
* Por ser A', punto inverso de A, respecto de la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{\lambda}$, tenemos que $\{OA \cdot OA' = \lambda; OA \cdot OA' = OT_2^2\} \rightarrow OT_2 = \sqrt{\lambda}$, siendo T_2uno de los puntos de tangencia de la circunferencia inversiva respecto del punto A'. Ahora bien, si T_1 es uno de los puntos de tangencia de la circunferencia que pasa por el polo respecto del punto A', tenemos que: $OA' \cdot AA' = A'T_1^2$; $OA' \cdot AA' = OA' \cdot (OA' - OA)$;

$OA' \cdot AA' = OA'^2 - OA \cdot OA' = OA'^2 - OT_2^2 = A'T_2^2. OA' \cdot AA' = A'T_2^2$. En definitiva, A'$T_1 = A'T_2 = \sqrt{\lambda}$.
Por tanto, la recta que buscamos es el eje radical de las dos circunferencias dadas.

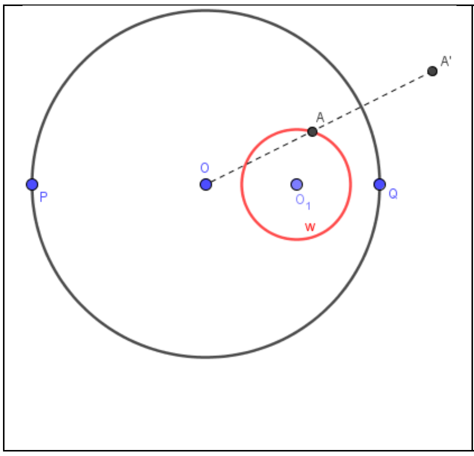
¿Cómo determinarla sin recurrir a la construcción del eje radical?
De forma recíproca a las construcciones realizadas anteriormente.
Construcción 1:
Hallamos B’, el punto inverso de B. Por B’ trazamos la recta deseada.
Construcción2:
Hallamos O_2’, el punto inverso de O_2. La mediatriz del segmento $OO_2{}'$ es la recta deseada.



Casos particulares.



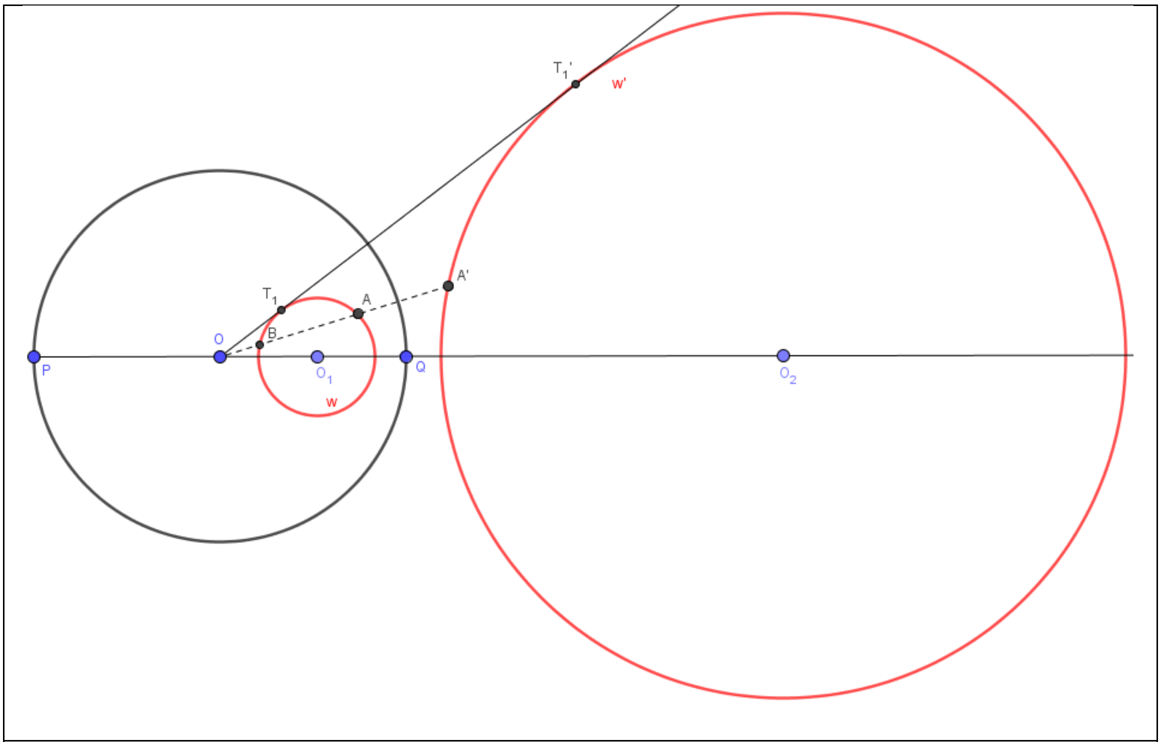
1.5.- Figura inversa de una circunferencia que no pasa por el polo.



Sea A un punto que recorre la circunferencia w.Sea A’, el punto inverso del punto A.La semirrecta OA interceptará a la circunferencia w en un segundo punto B. Resultará que $OA \cdot OB = OT_1^2 = k$, siendo OT_1 tangente a w. Tenemos dos relaciones:

$$OA \cdot OA' = \lambda$$
$$OA \cdot OB = k$$

Por tanto, $OA' = OB \cdot \frac{\lambda}{k} \rightarrow$ Como B recorre toda la circunferencia w, el punto A' recorrerá otra circunferencia w', siendo además homotética con w con centro, el polo O.
(Centro exterior de semejanza directa de w y w')

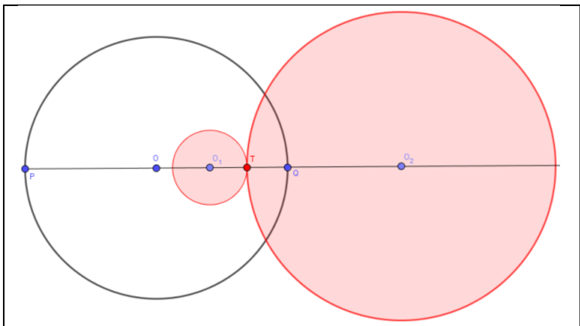


Nota: Observamos que aunque ambas circunferencias son homotéticas respecto del polo O, sin embargo sus centros $O_1\ y\ O_2$ no son inversos uno de otro. Veamos esto con mayor detalle. Sea O_1' el punto inverso de O_1. Tenemos que $OO_1 \cdot OO_1' = \lambda$. Por otro lado, $O_1\ y\ O_2$ verifican$OO_2 = OO_1 \cdot \frac{\lambda}{k}$. Para que los dos puntos $O_1'\ y\ O_2$ coincidiesen, debería pasar que

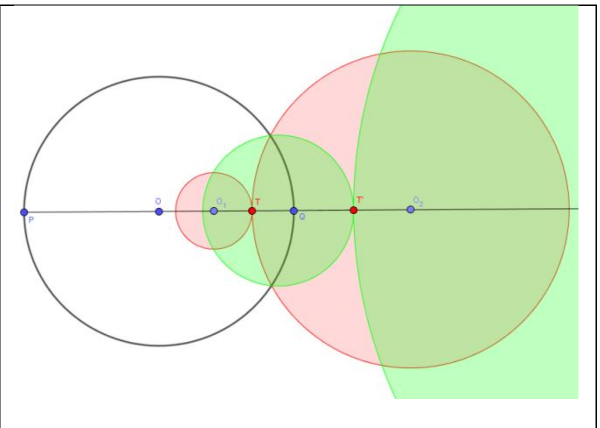
$$OO_2 = OO_1' \rightarrow \frac{\lambda}{OO_1} = OO_1 \cdot \frac{\lambda}{k} \rightarrow OO_1^2 = k = OT_1^2$$

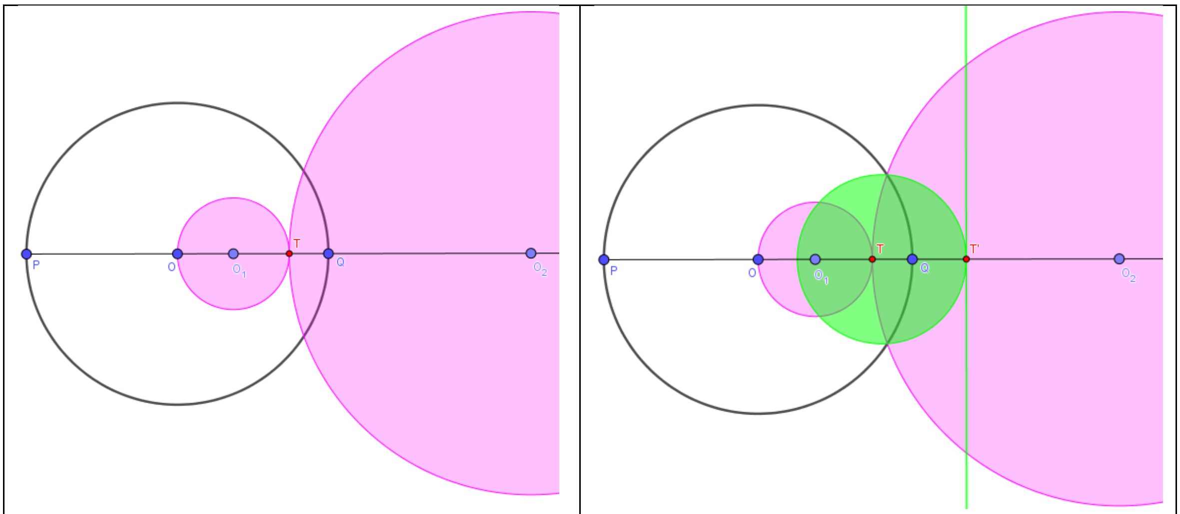
$$\rightarrow Absurdo, salvo\ que\ el\ radio\ de\ w\ sea\ nulo.$$

1.6.- Dos circunferencias tangentes, en caso de inversión y conforme a la posición del polo o centro de inversión se transforman en:

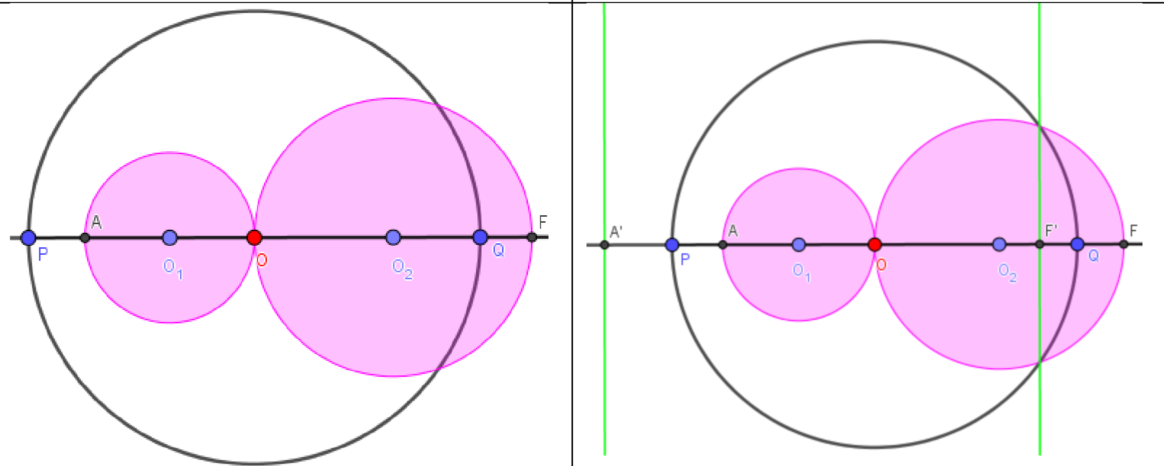


(1) El polo O no pertenece a ninguna de las circunferencias tangentes.



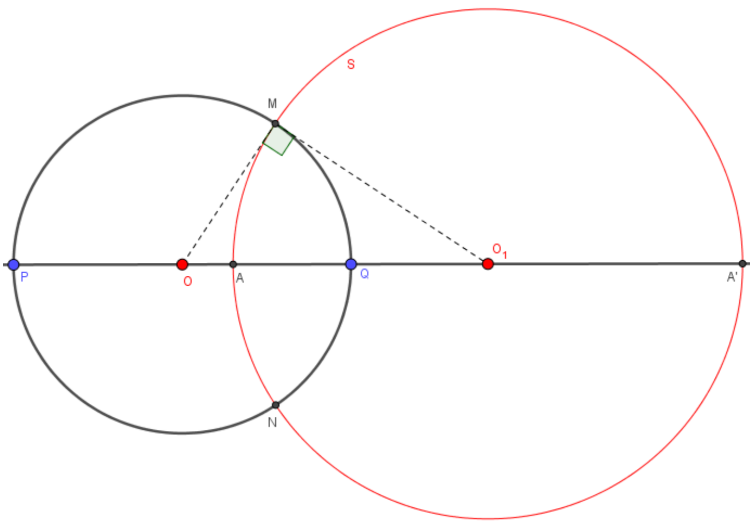


(2) Polo O perteneciendo a una de las circunferencias tangentes.



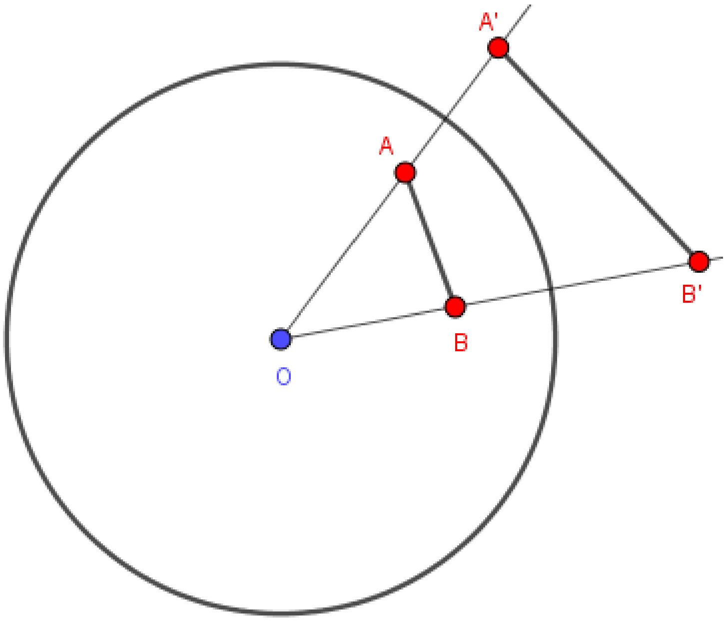
(3) Polo O perteneciendo a ambas circunferencias tangentes.

1.7.- La inversión de una circunferencia ortogonal con la circunferencia de inversión es ella misma. Sea S la circunferencia de centro O_1, ortogonal a la de inversión.



Los puntos de intersección M, N pertenecerán a la figura inversa de S. Si probamos que al menos hay otro punto de la figura inversa que pertenece a S, quedará claro que la figura inversa de S coincide con ella misma.Y eso es cierto sin más que trazar OO_1, la recta que une los centros de ambas circunferencias. Sean $A\ y\ A'$, los puntos diametralmente opuestos de S. Observamos que el valor de la potencia del punto O respecto de S coincide con $OA \cdot OA' = OM^2 = \lambda$. Por tanto, A' es el punto inverso de A. Así, la figura inversa de S coincide con ella misma.

1.8.- Las rectas tangentes a dos curvas inversas en dos puntos inversos $A\ y\ A'$ forman ángulos iguales con la recta que une el centro de inversión con $A\ y\ A'$.



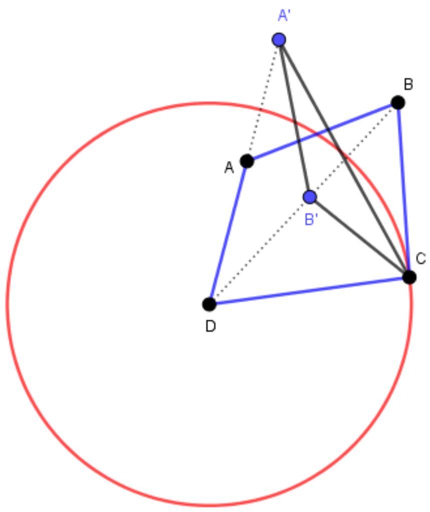
Sean B y B' otro par de puntos inversos. Tenemos que los triángulos OAB y OB'A' son semejantes. Esto quiere decir que $\measuredangle OAB = \measuredangle OB'A'$.
O sea que $AB\ y\ A'B'$ hacen los mismos ángulos con $OA'\ y\ OB'$, respectivamente.
A medida que B se acerca al punto A, B' se acercará al punto A' y las rectas $AB y A'B'$ se transforman en las tangentes en A y A', respectivamente. Entonces, en el límite, dichas tangentes deben hacer los mismos ángulos con OA.

1.9.- Si dos curvas se cortan formando un ángulo α, las dos curvas inversas también se cortan formando un ángulo α.
Basta trazar las tangentes a las dos curvas por el punto de corte y las tangentes a las dos curvas inversas por su punto de corte, y aplicar el resultado anterior.

2.-INVERSIÓN EN EL PLANO. MARCO PRÁCTICO.

En el resto del documento ilustraremos la forma de utilizar la inversión para la solución de problemas relacionados con nuestro *Laboratorio Virtual de Trianguloscabri*.

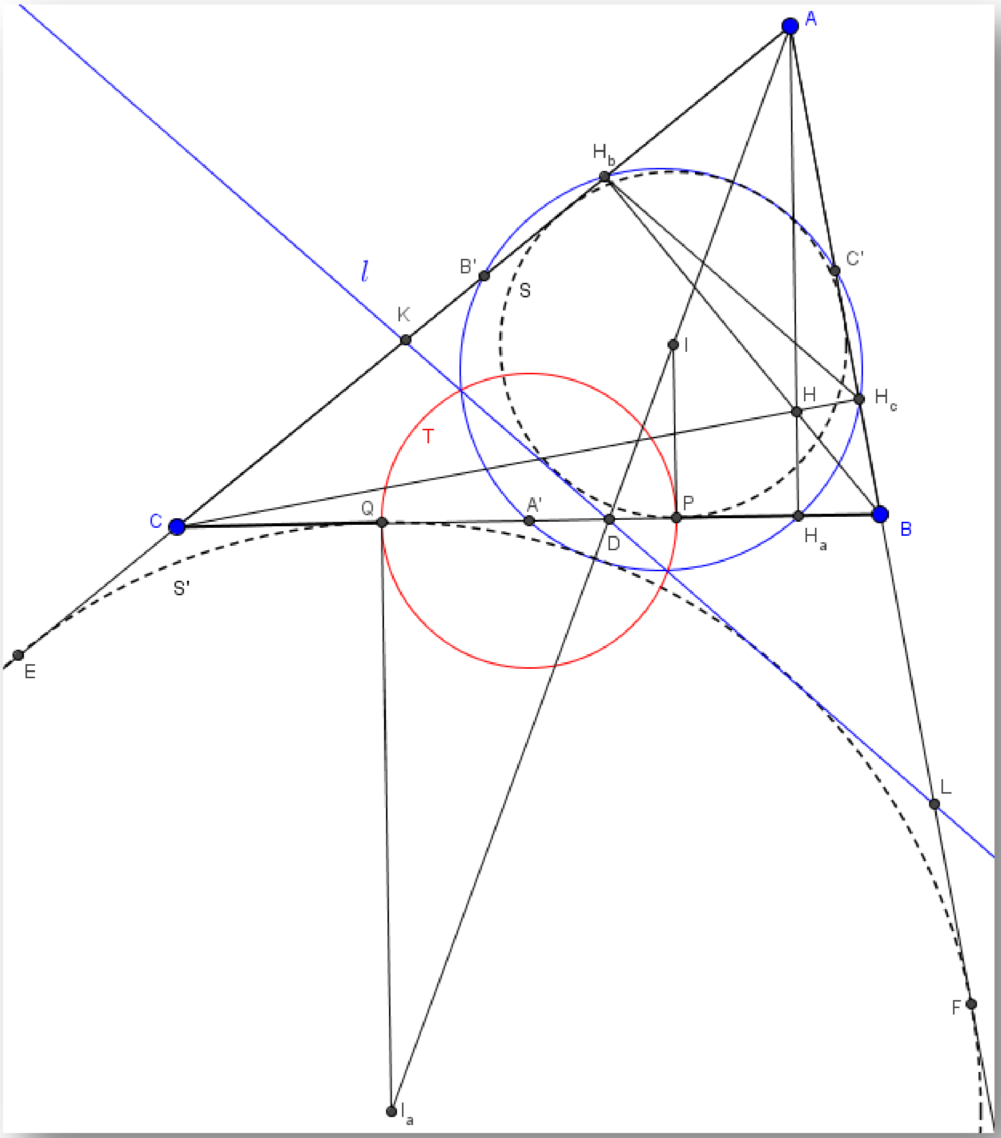
2.1.- (Teorema de Ptolomeo, extensión) En un cuadrilátero cualquiera, la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos es mayor o igual que el producto de las diagonales.
Solución dirigida:



Sea un cuadrilátero cualquiera ABCD y elegimos como polo de nuestra inversión un punto cualquiera de ellos. Sea este punto D y un radio r cualquiera. Por ejemplo $r = DC$.
En esta inversión, transformamos los puntos $A, B\ y\ C$ en $A', B'\ y\ C$, respectivamente.
Hallamos las longitudes de los lados del triángulo $A'B'C$.
$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB}; A'C = AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}; B'C = BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC};$
Por la desigualdad triangular, tenemos que $A'B' + B'C \geq A'C$.
Es decir, $AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB} + BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC} \geq AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC};$
$AB \cdot DC + BC \cdot DA \geq AC \cdot DB;$

Nota: Observamos que si ABCD fuesen concíclicos entonces los puntos A',B' y C serían colineales y obtendríamos el **Teorema de Ptolomeo.**

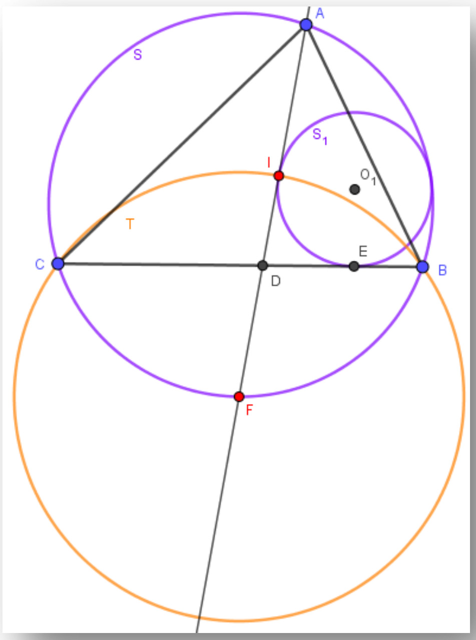
2.2.- (Teorema de Feuerbach) En un triángulo, el círculo de los nueve puntos es tangente al incírculo y a los tres excírculos.



Sea ABC el triángulo dado. Sean S y S’ el incírculo y el excírculo correspondiente al lado BC.
Sean $A', D\ y\ H_a$, los pies de la mediana, la bisectriz y la altura respectivamente, trazadas desde A.
Queremos demostrar que el círculo de los nueve puntos es tangente a S y S’, y para ello vamos a hacer una **Inversión** de forma que se pueda ver más claramente la tangencia en las figuras inversas.
Sabemos que $CQ = BP = s - b$, de donde $A'Q = A'P$.
Sea T la circunferencia con centro A’ y radio $A'Q = A'P$. Por tanto, esta circunferencia es ortogonal a S y S’. Como quiera que la circunferencia de los nueve puntos pasa por A’, entonces aquélla se transformaría por esta inversión en una recta l. Vamos a probar que esta recta l es tangente a ambas circunferencias S y S’. Teniendo en cuenta el triángulo ACD, resulta que los puntos de corte de las bisectrices interna y externa del ángulo C con el lado opuesto AD que son $I\ e\ I_a$, respectivamente y los vértices A y D son conjugados armónicos. Como $I_aQ, IP\ y\ AH_a$ son perpendiculares al lado BC, resulta que los puntos $Q, D, P\ y\ H_a$ son también conjugados armónicos. Por tanto, los puntos $D\ y\ H_a$ son inversos con respecto a T. Por tanto, como H_a pertenece a la circunferencia de los nueve puntos, la figura inversa l pasará por el punto D. Sabemos que esta recta l ha de ser paralela a la recta tangente en A’ a la circunferencia de los nueve puntos.

Observamos además que la circunferencia de los nueve puntos y la circunscrita tienen al segmento $H_B H_c$ como eje radical de las mismas. Por tanto, este segmento será perpendicular a la línea que une los centros. De este modo, la recta l, será la paralela al segmento $H_B H_c$. Entonces si notamos por K y L, los respectivos puntos de la recta l sobre los lados AC y AB, podemos considerar el triángulo AKL que será semejante al triángulo $AH_b H_c$. Como quiera que el triángulo $AH_b H_c$ es semejante al triángulo ABC, entonces resulta que el triángulo AKL será semejante al triángulo ABC. Por tanto, el ángulo formado por l y AC es B, y el ángulo formado por l y AB es C. Como la recta l pasa por D, debe ser la simetría de BC sobre la bisectriz AD, que evidentemente es tangente a S y S'. Entonces l es tangente a S y S'. Invirtiendo nuevamente sobre T, la recta l se transforma en el círculo de los nueve puntos, S y S' se transforman en sí mismas, y por lo tanto el círculo de los nueve puntos es tangente a S y S'.

2.3.- En un triángulo ABC sea I el incentro. Demostrar que un círculo tangente a BC y AI en I es tangente al circuncírculo.

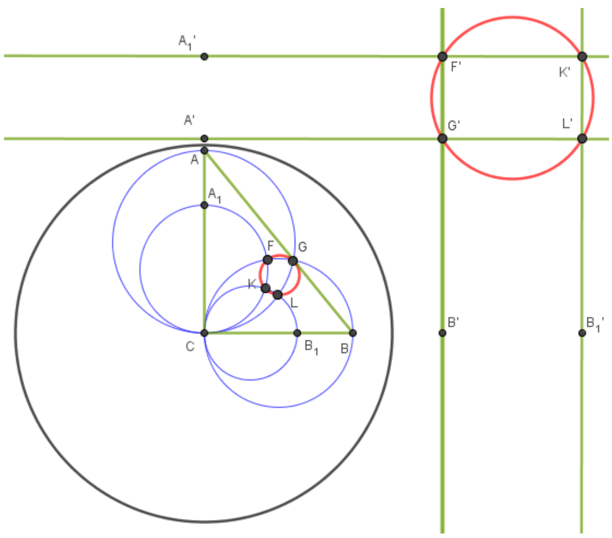


Sean S y S_1, respectivamente, la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y la que es tangente a BC y AI en I. Tenemos que probar que S y S_1 son tangentes.

Sea T la circunferencia de centro F, el punto donde la bisectriz AI y la mediatriz de BC intercepta a S y de radio $FC = FB$.
Esta circunferencia T pasa por el punto I:
Véase para ello, las igualdades entre ángulos:
$\measuredangle AFB = 2\measuredangle ICB$; $\measuredangle AFC = 2\measuredangle IBC$.

Si consideramos T, como la circunferencia inversiva, tenemos que T y S_1 son ortogonales. Por tanto, la figura inversa de S_1 respecto de T coincide con ella misma. Por otro lado, la figura inversa de S respecto de T es la recta BC que, evidentemente es tangente por construcción a la circunferenciaS_1.
En definitiva, si las figuras inversas S y el lado BC son tangentes, lo son también sus originales, es decir,
S y S_1 son tangentes. ■

2.4.- Sea dado un triángulo ABC rectángulo en C. Sean las dos circunferencias que tienen como diámetro, AC y BC, respectivamente. Sean además otras dos circunferencias centradas en cualesquiera de los lados Ac y BC y que pasan por el vértice C.
Entonces los 4 puntos de intersección de estos dos pares de circunferencias son concíclicos.



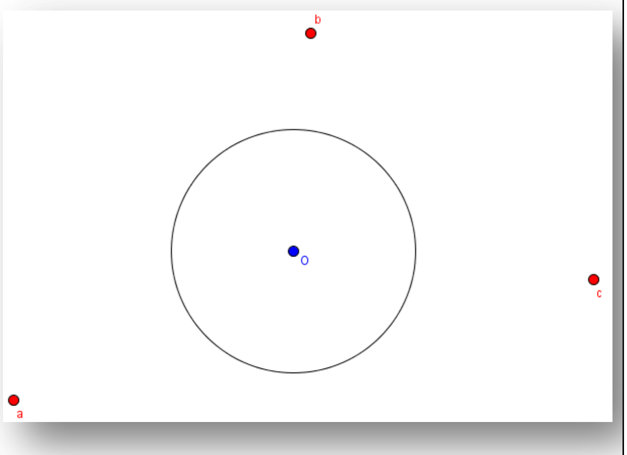
<u>Nota:</u> Realiza tú mismo la construcción y comprueba con GeoGebra todos los hechos geométricos relevantes.

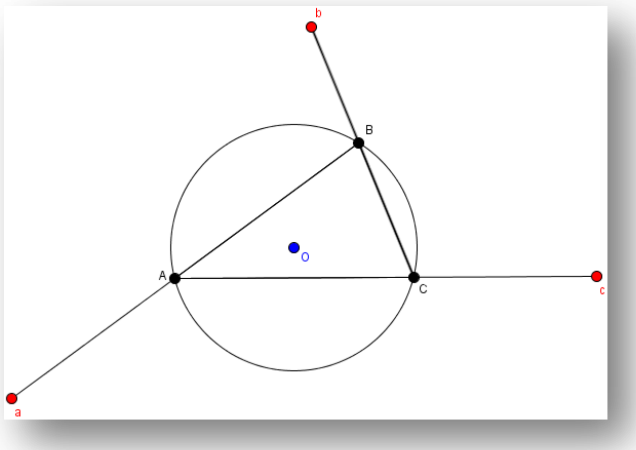
Considera cualquier circunferencia centrada en C como inversiva y veremos cómo se transforman los puntos de corte de dichas parejas de circunferencias.

2.5.- Problema de Castillon.

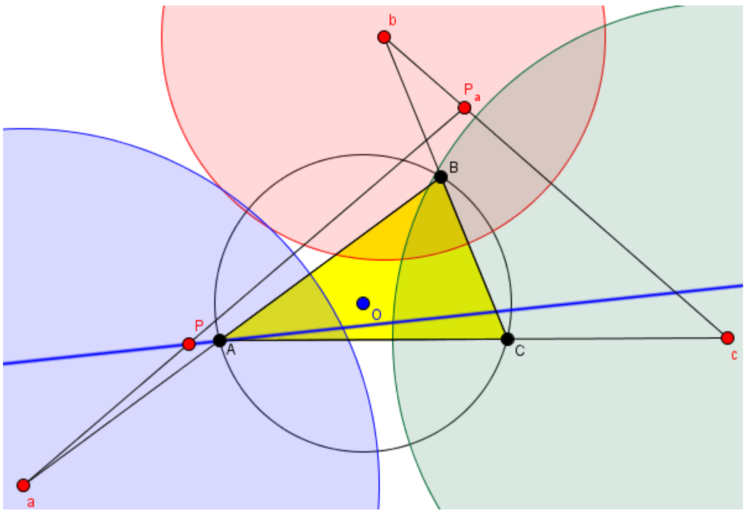
Sean a, b, c tres puntos exteriores a una circunferencia dada. En dicha circunferencia inscribir un triángulo ABC, de modo que $AB, BC\ y\ CA$ pasen por los puntos $a, b\ y\ c$, respectivamente.

Sean a, b, c, los puntos por los cuales pasan respectivamente $AB, BC\ y\ \ CA$. Nos serviremos de estos puntos como centros de inversión, tomando como potencia de inversión para cada uno de ellos, su potencia respecto a la circunferencia. Habrá que decir que el valor de esas potencias se determina como la longitud del segmento de las tangentes trazadas desde cada uno de los puntos $a, b\ y\ c$ a la circunferencia dada. Por tanto, todas las circunferencias inversivas serán ortogonales con la dada inicialmente. En todo el proceso, esta circunferencia permanece invariable por dichas transformaciones inversivas.
Supongamos que el triángulo ABC esté construido y verifica las condiciones exigidas. Entonces después de tres inversiones sucesivas respecto de los polos $a, b\ y\ c$, el punto *A* vendrá a coincidir con *A.*





Sea P el punto que, después de dos inversiones respecto a los puntos $a\ y\ b$, viene a coincidir con *c*; este punto P se hallará efectuando sucesivamente la inversión de *c* respecto de los polos *b y a,* en ese orden.



Veamos qué le sucede a la recta PA después de efectuar las tres inversiones sucesivas.
Observemos el diagrama siguiente:
Recta PA
→ (Inversión a):
Circunferencia que pasa por $a, B\ y\ P_a$.
→ (Inversión b):
Circunferencia que pasa por $a_{bc} = c\ , C\ y\ P_{ab}$.
→ (Inversión c):
Recta que pasa por $A\ \ y\ \ P_{abc} = Q$.

En definitiva, la recta PA después de tres inversiones se transforma en la recta QA, siendo Q el punto que se obtiene cuando se hace sucesivamente la inversión de a, respecto de b y c. La consecuencia de ello es que PA y QA no forman ya una misma recta, porque los ángulos que forman con la circunferencia son de signo contrario.

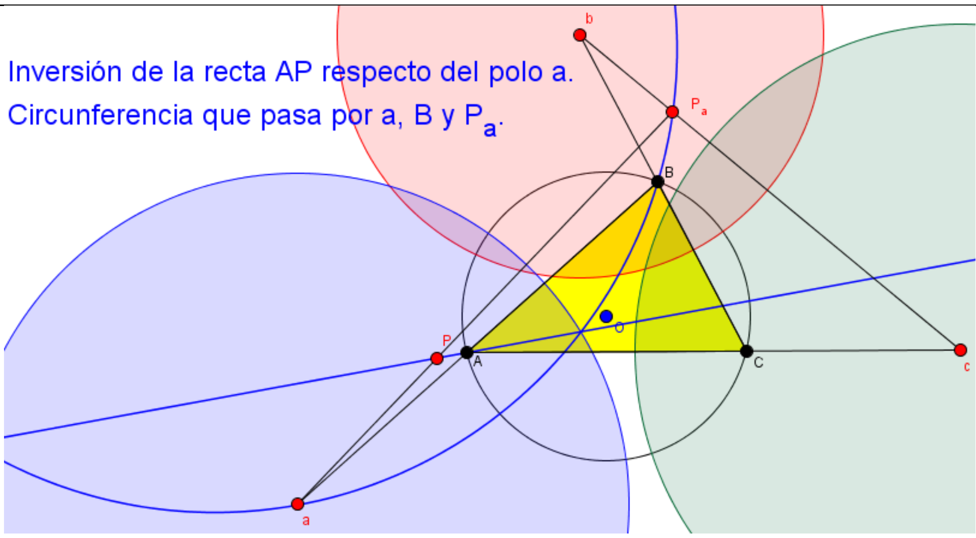
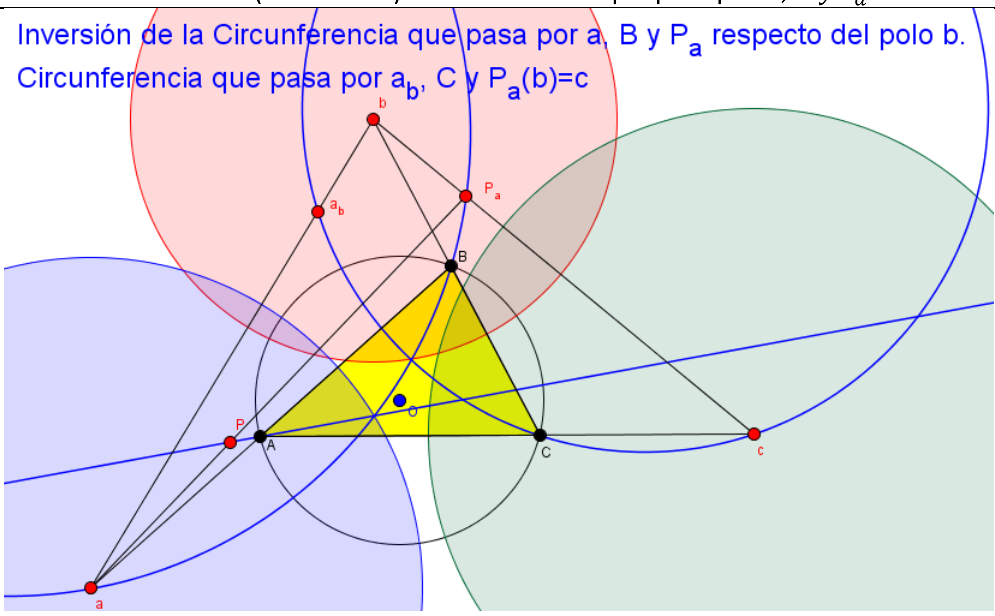
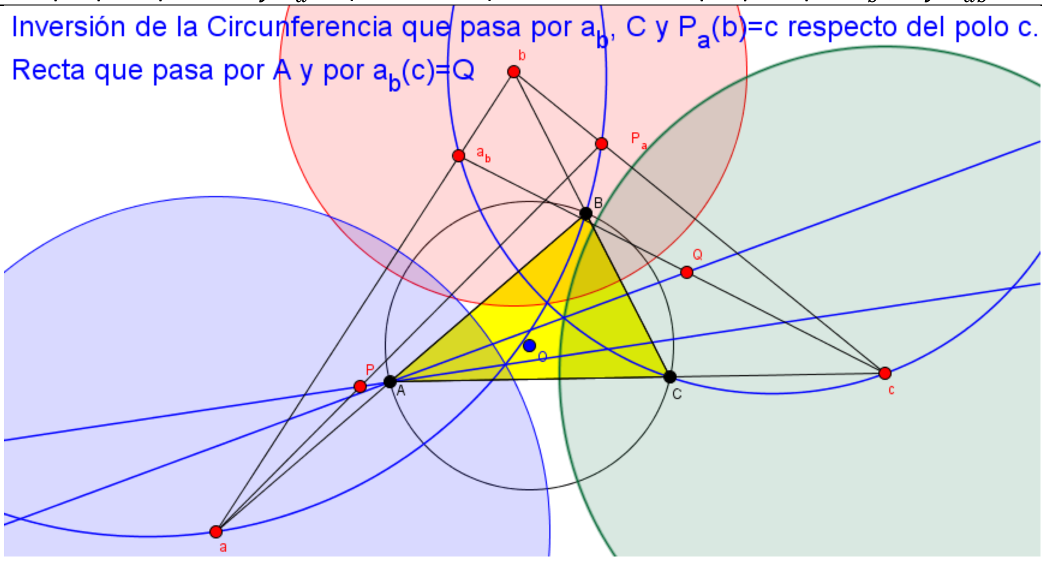


Figura inversa de la Recta PA $\rightarrow$ (Inversión a): Circunferencia que pasa por $a, B\ y\ P_a$.

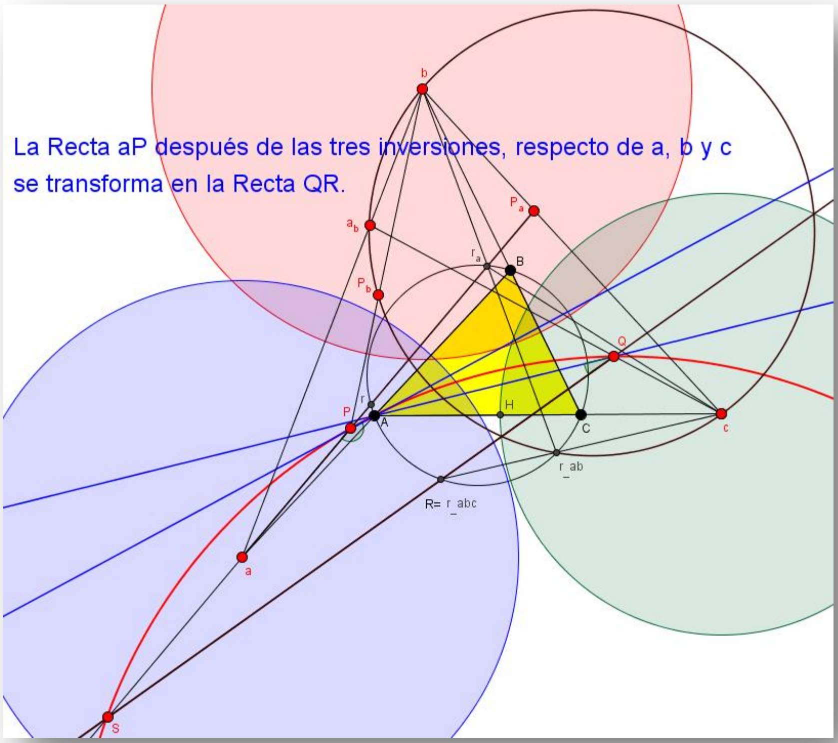


Circunferencia que pasa por $a, B\ y\ P_a \rightarrow$ (Inversión b): Circunferencia que pasa por a_b , $C\ y\ P_{ab} = c$.



Circunferencia que pasa por a_b , $C\ y\ P_{ab} = c \rightarrow$ (Inversión c): Recta que pasa por $A\ \ y\ \ a_{bc} = Q$.

En definitiva, la recta PA después de tres inversiones se transforma en la recta QA, siendo $Q = a_{bc}$, el punto que se obtiene cuando se hace sucesivamente la inversión de a, respecto de b y c. La consecuencia de ello es que $PA\ y\ QA$ no forman ya una misma recta, porque los ángulos que forman con la circunferencia son de signo contrario. En efecto, al ser un número impar de inversiones (tres), los ángulos que forman las respectivas figuras inversas con la circunferencia inicial de centro O van variando de orientación sucesivamente. Finalmente, PA y QA, forman con la circunferencia ángulos de signo contrario.
Ahora hacemos la inversión respecto de $a, b\ y\ c$ de uno de los puntos donde la recta Pa corta a la circunferencia, Sea este punto r. Después de la inversión, la línea aP se transformará en la recta QR.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Recta aP

→ (Inversión a):
La propia Recta aP, recta que pasa por $a, r\ , r_a\ , P\ y\ P_a$.

→ (Inversión b):
Circunferencia que pasa por $b, a_b\ , P_{ab}\ = c\ \ , r_a\ y\ b$.

→ (Inversión c):
Recta que pasa por
$a_{bc}\ = Q\ \ y\ \ r_{abc}\ = R$.</td>
</tr>
</table>