

### Problema 885.-

Problema 2 del Primer Nivel de la IX Olimpiada de Mayo del VIII Concurso de Primavera de Matemáticas.

El triángulo ABC es rectángulo en A y R es el punto medio de la hipotenusa BC. Sobre el cateto mayor AB se marca el punto P tal que  $CP=BP$  y sobre el segmento BP se marca el punto Q tal que el triángulo PQR es equilátero. Si el área del triángulo ABC es 27, calcula el área del triángulo PQR.

VIII Concurso de Primavera de Matemáticas (2004) (p. 97)

#### Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

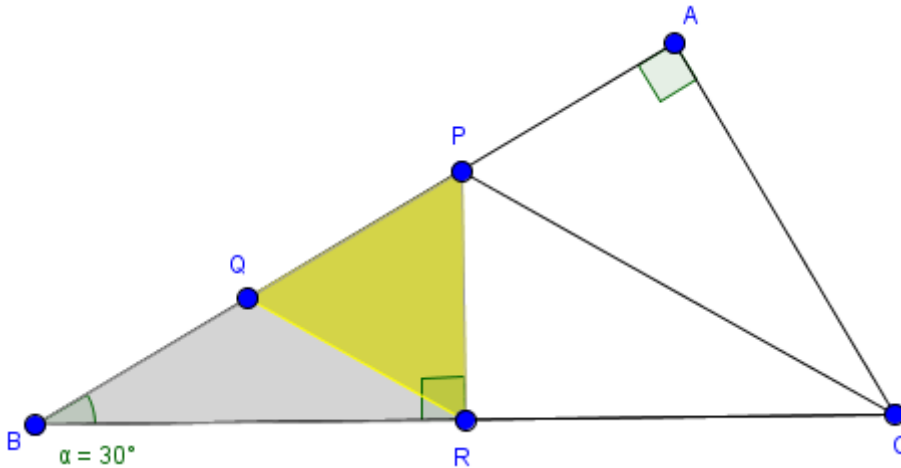
A la vista del enunciado, deducimos que el triángulo rectángulo ABC no puede ser otro que el de ángulos  $30^\circ$  y  $60^\circ$ . Esto es así, ya que por la semejanza de los triángulos rectángulos BRP y BAC, y por el hecho que indica que

el ángulo en P del triángulo PAR ha de ser  $60^\circ$ , necesariamente entonces el triángulo ABC será el de ángulos  $30^\circ$  y  $60^\circ$ .

De este modo,  $AC = RB = RC$  y la razón de semejanza entre los triángulos ABC y RPB será

$$k = \frac{AC}{\sqrt{3} \cdot OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, la razón entre las áreas de ambos triángulos semejantes será igual a  $k^2 = \frac{1}{3}$ .



En definitiva, el área del triángulo RPB será igual a  $\frac{27}{3} = 9 u^2$ .

Como quiera que  $QP=RP$ , entonces  $PQ=QB$  y el área del triángulo BQR será la mitad del área del triángulo RPB. Así, por fin, el área del triángulo PQR será igual a la otra mitad del área del triángulo BPR.

$$[PQR] = 4'5 u^2.$$