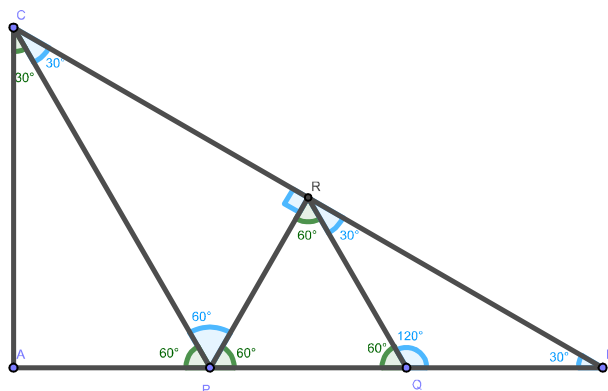


Problema 1 (Problema 2 del Primer Nivel de la IX Olimpiada de Mayo del VIII Concurso de Primavera de Matemática)

El triángulo ABC es rectángulo en A y R es el punto medio de la hipotenusa BC . Sobre el cateto mayor AB se marca el punto P tal que $CP = BP$ y sobre el segmento BP se marca el punto Q tal que el triángulo PRQ es equilátero. Si el área del triángulo ABC es 27 calcula el área del triángulo PQR

Solución



Por ser P un punto de AB tal que $CP = BP$ entonces P pertenece a la mediatriz de la hipotenusa CB . Como R es el punto medio de BC sabemos que $\widehat{CRP} = 90^\circ$

Al ser Q un punto de AB de manera que PQR sea un triángulo equilátero deducimos que $\widehat{BQR} = 120^\circ$, $\widehat{QRB} = 30^\circ$, $\widehat{RBQ} = 30^\circ$

Lo que nos permite afirmar que el $\triangle RQB$ es isósceles siendo $RQ = QB$.

Vamos pues a calcular el segmento RB en función de RQ

Aplicando el teorema de los senos al $\triangle RQB$

$$RB = \frac{RQ \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{RQ \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = RQ\sqrt{3}$$

La superficie del $\triangle PRB$ al ser rectángulo en R es

$$S_{\triangle PRB} = \frac{RB \cdot PR}{2} = \frac{\sqrt{3}(RQ)^2}{2}$$

Como el $\triangle CPR$ simétrico con respecto al $\triangle PRB$ los ángulos $\widehat{PCR} = 30^\circ$ y $\widehat{RPC} = 60^\circ$. Lo que nos permite afirmar que el $\triangle ACP$ también es simétrico de $\triangle CPR$

Por todo lo anteriormente expuesto y utilizando el hecho de que $S = 27$ tenemos que

$$27 = S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle PRB} = \frac{3\sqrt{3}(RQ)^2}{2}$$

$$RQ^2 = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$RQ = \sqrt{6\sqrt{3}}$$

Como $\triangle PQR$ es equilátero su área es

$$S_{\triangle PQR} = \frac{RQ^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{2}$$

Además las dimensiones del triángulo inicial ABC son

$$\begin{aligned} AB &= 3RQ = 3\sqrt{6\sqrt{3}} = 3\sqrt[4]{108} \\ AC &= RQ\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{6\sqrt{3}} = \sqrt[4]{972} \\ CB &= 2\sqrt{3}RQ = 2\sqrt{3}\sqrt{6\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{972} \end{aligned}$$

Juan José Isach Mayo
Profesor de Matemáticas (Jubilado)
Valencia