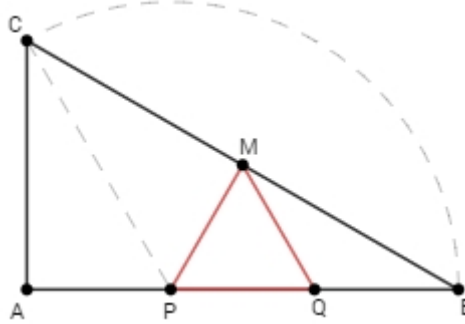


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 885. (Problema 2 del Primer Nivel de la IX Olimpiada de Mayo del VIII Concurso de Primavera de Matemáticas (2004)) El triángulo ABC es rectángulo en A y M es el punto medio de la hipotenusa BC . Sobre el cateto mayor AB , se marca el punto P tal que $CP = BP$ y, sobre el segmento PB , se marca el punto Q tal que el triángulo PQM es equilátero. Calcular (PQM) , sabiendo que $(ABC) = 27$.



Solución:

Como:

$$27 = (ABC) = \frac{bc}{2} \Rightarrow S = bc = 54$$

y el triángulo ABC es rectángulo en A , entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} = 0 \\ S_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = c^2 \\ S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = b^2 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , si $P = (p : 1 - p : 0)$ ($0 < p < 1$), como:

$$0 = CP^2 - BP^2 = c^2(1 - p)^2 + b^2 - c^2p^2 = b^2 + (1 - 2p)c^2 \Rightarrow p = \frac{b^2 + c^2}{2c^2}$$

entonces:

$$P = \left(\frac{b^2 + c^2}{2c^2} : \frac{c^2 - b^2}{2c^2} : 0 \right) = (b^2 + c^2 : c^2 - b^2 : 0)$$

por lo que:

$$PM \equiv 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ b^2 + c^2 & c^2 - b^2 & 0 \end{vmatrix} = (b^2 - c^2)x + (b^2 + c^2)y - (b^2 + c^2)z$$

TRIÁNGULOS CABRI

y, como, $\angle BPM = \frac{\pi}{3}$, resulta que:

$$S \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2(b^2 + c^2)S_A - 2b^2S_B + 0S_C}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ b^2 - c^2 & b^2 + c^2 & -(b^2 + c^2) \end{vmatrix}}$$

$$18\sqrt{3} = b^2$$

luego:

$$b = 3\sqrt[4]{12} \xrightarrow{bc=54} c = 3\sqrt[4]{108} \Rightarrow P = \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{3} : 0\right)$$

Finalmente, si:

$$Q = (1-t)P + tB = \left(\frac{2(1-t)}{3} : \frac{2t+1}{3} : 0\right) (0 < t < 1)$$

como:

$$0 = PM^2 - PQ^2 \underset{M=(0:\frac{1}{2}:\frac{1}{2})}{=} 54\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + 18\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 54\sqrt{3}\left(\frac{2t}{3}\right)^2 = 6\sqrt{3} - 24\sqrt{3}t^2 \xrightarrow{0 < t < 1} t = \frac{1}{2}$$

entonces:

$$Q = \left(\frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 0\right)$$

y, por tanto:

$$(PQM) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} (ABC) = \left(\frac{3}{18}\right)27 = \frac{9}{2}$$